Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Байкальский государственный университет

Е.В. Аксенюшкина

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

*Текстовое электронное издание*

Иркутск
Издательский дом БГУ
2021

УДК 519.86
ББК 22.18

Издается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

*Рецензенты* канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. Леонова (БГУ)
канд. физ.-мат. наук, доц. Н.В. Мамонова (БГУ)

**Аксенюшкина, Е.В.** Математические и инструментальные средства в экономике : учеб. пособие / Е.В. Аксенюшкина. – Иркутск : Изд. дом БГУ, 2021. – 99 с. – URL: http://lib-catalog.bgu.ru. – Текст : электрон.

Учебное пособие предназначено для освоения технологических возможностей табличного процессора MS Excel в ходе решения математических финансово-экономических задач, формирования профессионально ориентированных компетенций, необходимых студентам как в ходе учебного процесса при изучении других дисциплин образовательных программ, так и в дальнейшей профессиональной деятельности. Предложены варианты заданий для самостоятельного решения по каждой теме.

Предназначено для студентов экономических специальностей всех форм обучения.

*Учебное электронное издание*

Минимальные системные требования:
веб-браузер Internet Explorer версии 6.0 и более поздние, Opera версии 7.0
и более поздние, Google Chrome 3.0 и более поздние.
Компьютер с доступом к сети Интернет.
Минимальные требования к конфигурации и операционной системе компьютера
определяются требованиями перечисленных выше
программных продуктов.

Подписано к использованию 07.09.2021.
Объем 2,9 Мб.

Байкальский государственный университет.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.
http://bgu.ru.

# Оглавление

# Предисловие

Образование как одна из сфер человеческой деятельности всегда способствовало поступательному развитию общества, социально-экономическому и научно-педагогическому процессу. Такой же является роль образования и в современных условиях проявления тенденции к повсеместной информатизации и автоматизации. Ставится задача уже не выборочного использования программных средств и информационных систем в различных отраслях и направлениях для решения отдельных, частных вопросов. Изменились технологические возможности – глобальные информационные сети, мобильные коммуникационно-вычислительные устройства, облачные ресурсы, интеллектуальные системы, робототехника, обработка больших данных, дистанционное управление и обучение. Другими стали материальные и духовные потребности человека, общественное сознание и культура. В таких условиях переход к цифровой экономике является осознанной объективной необходимостью, позволяющей комплексно решить многие жизненно-важные процессы за счет интеллектуализации труда и производства с целью обеспечения стабильного роста благосостояния всех членов общества.

Решение поставленной задачи требует коренного изменения подходов к деятельности различных государственных институтов, в том числе системы образования.

Данное учебное пособие предназначено для освоения технологических возможностей табличного процессора MS Excel в ходе решения математических финансово-экономических задач, формирования профессионально ориентированных компетенций, необходимых студентам как в учебном процессе при изучении других дисциплин образовательных программ, так и в дальнейшей профессиональной деятельности.

# 1. Инструментальные средства в оптимизации

Решение оптимизационных задач аналитическими методами может применяться только в случае двух переменных в математической модели и только в простейших случаях, которые зачастую далеки от реальности и не представляют практического интереса. Во всех остальных случаях оптимизационные задачи требуют для своего решения применения компьютерных технологий. В качестве инструмента компьютерного моделирования оптимизационных задач используется пакет прикладных программ, входящих в состав MS Excel.

## 1.1. Поиск решения при определении оптимального ассортимента продукции

Компаниям часто приходится определять, какое количество продуктов нужно производить каждый месяц. В своей простейшей форме задача определения ассортимента продукции сводится к определению количества каждого продукта, производимого за месяц, для максимизации прибыли. Ассортимент продукции должен соответствовать следующим ограничениям:

– для производства продукции могут использоваться только доступные ресурсы;

– поскольку спрос на каждый продукт ограничен, не следует производить за месяц больше, чем можно реализовать. Избыточное производство – это напрасный расход ресурсов (например, производство товара с коротким сроком хранения).

***Пример 1.1.*** Фармацевтическая компания производит на своем заводе шесть препаратов. Для производства каждого препарата требуется рабочая сила и сырье. В таблице указано требуемое количество рабочего времени и необходимое количество сырья для производства единицы каждого препарата

| Ресурсы | Медицинские препараты | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Рабочее время (ч) | 6 | 5 | 4 | 3 | 2,5 | 1,5 |
| Сырье (г) | 3,2 | 2,6 | 1,5 | 0,8 | 0,7 | 0,3 |

Цена одного грамма выпускаемого медицинского препарата, его себестоимость, а также отчисления прибыли с каждого грамма приведены в таблице.

| Показатель | Медицинские препараты | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Цена (тыс. р.) | 12,5 | 11,0 | 9,0 | 7,0 | 6,0 | 3,0 |
| Себестоимость (тыс. р.) | 6,5 | 5,7 | 3,6 | 2,8 | 2,2 | 1,2 |
| Прибыль (тыс. р.) (цена – себестоимость) | 6,0 | 5,3 | 5,4 | 4,2 | 3,8 | 1,8 |

Ежемесячные потребности в каждом препарате составляют 960, 928, 1 041, 977, 1 084 и 1 055 г соответственно. В текущем месяце в распоряжении компании имеется 4 500 ч рабочего времени и 1 600 г сырья. Каким образом компания может максимизировать прибыль?

Внесем необходимую информацию данного примера в MS Excel, построив следующие таблицы (рис. 1.1). В строке ***Оптимальный план*** внесем пробную величину выпускаемых медицинских препаратов, например 1.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Ассортимент выпускаемых препаратов* | *Медицинский препарат 1* | *Медицинский препарат 2* | *Медицинский препарат 3* | *Медицинский препарат 4* | *Медицинский препарат 5* | *Медицинский препарат 6* |
| 2 | ***Оптимальный план*** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | *Прибыль* | 6 | 5,3 | 5,4 | 4,2 | 3,8 | 1,8 |
| 4 | *Потребность в препарате* | 960 | 928 | 1041 | 977 | 1084 | 1055 |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | *Ресурсы* | *Расход ресурсов на производство одного грамма препарата* | | | | | |
| 7 | *Рабочее время* | 6 | 5 | 4 | 3 | 2,5 | 1,5 |
| 8 | *Сырье* | 3,2 | 2,6 | 1,5 | 0,8 | 0,7 | 0,3 |
| 9 | | | | | | | |

Рис. 1.1. Исходная информация для задачи выбора ассортимента продукции

Ключом к решению задачи с выбором ассортимента продукции является эффективный расчет используемых ресурсов и прибыли, связанных с любым заданным ассортиментом продукции. Важным инструментом в этом расчете является функция СУММПРОИЗВ. Эта функция перемножает соответствующие значения в диапазонах ячеек и возвращает их сумму. Все диапазоны ячеек в аргументах функции СУММПРОИЗВ должны иметь одинаковую размерность, т.е. функцию СУММПРОИЗВ можно использовать для двух строк или двух столбцов, но не для столбца и строки.

В качестве примера использования функции СУММПРОИЗВ вычислим применение ресурсов. Используемое рабочее время вычисляется по формуле:

$$\begin{gathered}
(\textit{рабочее время для производства грамма препарата } 1) \times \\
\times (\textit{количество граммов препарата } 1) + \\
+ (\textit{рабочее время для производства грамма препарата } 2) \times \\
\times (\textit{количество граммов препарата } 2) + \ldots + \\
+ (\textit{рабочее время для производства грамма препарата } 6) \times \\
\times (\textit{количество граммов препарата } 6).
\end{gathered}$$

Расчет рабочего времени выполняется по следующей формуле: =B2·B7+C2·C7+D2·D7+E2·E7+F2·F7+G2·G7. Аналогично объем сырья вычисляется как =B2·B8+C2·C8+D2·D8+E2·E8+F2·F8+G2·G8. Однако ввод таких формул даже для шести продуктов отнимает много времени. Только представьте, сколько времени это займет в компании, производящей на своем заводе, например, 50 продуктов.

Гораздо проще вычислить рабочее время и объемы сырья, воспользовавшись формулой =СУММПРОИЗВ($B$2:$G$2;B7:G7). Эта формула также вычисляет выражение =B2·B7+C2·C7+D2·D7+E2·E7+F2·F7+G2·G7 (используемое количество рабочего времени), как и предыдущая, но ее проще ввести. Укажите знак $ в диапазоне B2:G2 для использования ассортимента продукции из 2 строки при копировании формулы. Вычислим по такой же формуле количество используемого на производстве сырья. Полученную информацию внесем в ячейки H7 и H8 (рис. 1.2).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Ассортимент выпускаемых препаратов* | *Медицинский препарат 1* | *Медицинский препарат 2* | *Медицинский препарат 3* | *Медицинский препарат 4* | *Медицинский препарат 5* | *Медицинский препарат 6* | | |
| 2 | ***Оптимальный план*** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| 3 | *Прибыль* | 6 | 5,3 | 5,4 | 4,2 | 3,8 | 1,8 | | |
| 4 | *Потребность в препарате* | 960 | 928 | 1041 | 977 | 1084 | 1055 | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | *Ресурсы* | *Расход ресурсов на производство одного грамма препарата* | | | | | | *Используемые ресурсы* | *Доступные ресурсы* |
| 7 | *Рабочее время* | 6 | 5 | 4 | 3 | 2,5 | 1,5 | 22 | 4500 |
| 8 | *Сырье* | 3,2 | 2,6 | 1,5 | 0,8 | 0,7 | 0,3 | 9,1 | 1600 |
| 9 | | | | | | | | | |

Рис. 1.2. Информация о расходе ресурсов на производстве

Аналогичным образом суммарная прибыль вычисляется по формуле =СУММПРОИЗВ(B2:G2;B3:G3) (рис. 1.3).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Ассортимент выпускаемых препаратов* | *Медицинский препарат 1* | *Медицинский препарат 2* | *Медицинский препарат 3* | *Медицинский препарат 4* | *Медицинский препарат 5* | *Медицинский препарат 6* | *Суммарная прибыль* | |
| 2 | *Оптимальный план* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 26,5 | |
| 3 | *Прибыль* | 6 | 5,3 | 5,4 | 4,2 | 3,8 | 1,8 | | |
| 4 | *Потребность в препарате* | 960 | 928 | 1041 | 977 | 1084 | 1055 | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | *Ресурсы* | *Расход ресурсов на производство одного грамма препарата* | | | | | | *Используемые ресурсы* | *Доступные ресурсы* |
| 7 | *Рабочее время* | 6 | 5 | 4 | 3 | 2,5 | 1,5 | 22 | 4500 |
| 8 | *Сырье* | 3,2 | 2,6 | 1,5 | 0,8 | 0,7 | 0,3 | 9,1 | 1600 |
| 9 | | | | | | | | | |

Рис. 1.3. Информация о суммарной прибыли от реализации препаратов

Теперь можно определить три компоненты компьютерной модели поиска решения для выбора ассортимента продукции:

1) **целевая ячейка** – цель состоит в максимизации суммарной прибыли, вычисляемой в ячейке H2;

2) **изменяемые ячейки** – объем каждого произведенного препарата в граммах указан в диапазоне B2:G2;

3) **ограничения** строятся исходя из следующих условий:

– не использовать больше рабочего времени и сырья, чем доступно. Это означает, что значения в ячейках H7:H8 (используемые ресурсы) должны быть меньше или равны значениям в ячейках I7:I8 (доступные ресурсы);

– не производить препаратов больше, чем требуется. Это означает, что значение в ячейках B2:G2 (оптимальный план) должны быть меньше или равны значениям потребностей в каждом препарате B3:G3.

Откроем вкладку **Данные** и в группе **Анализ** выберем инструмент **Поиск решения**. Откроется диалоговое окно **Параметры поиска решения** (рис. 1.4).

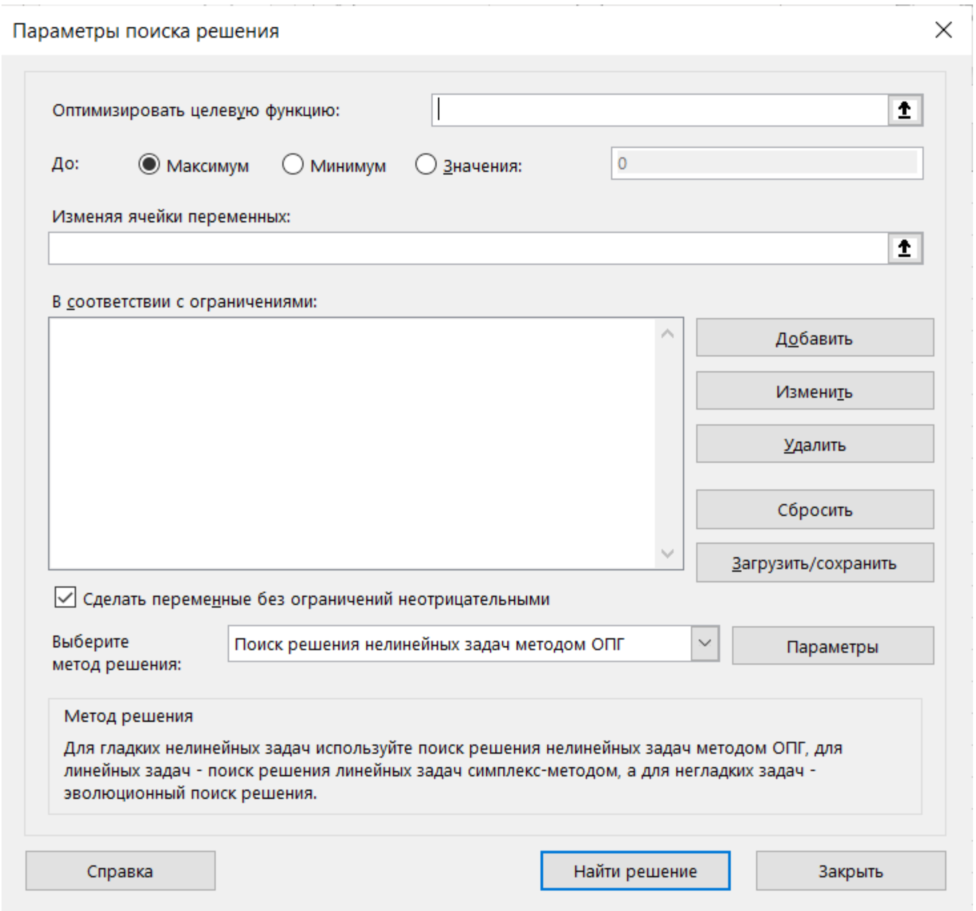



Рис. 1.4. Диалоговое окно **Параметры поиска решения**

В поле **Оптимизировать целевую функцию** внесем ячейку со значением суммарной прибыли H2. В поле **Изменяя ячейки переменных** выберем диапазон B2:G2, содержащий количество каждого производимого медицинского препарата в граммах. Диалоговое окно должно выглядеть как на рис. 1.5

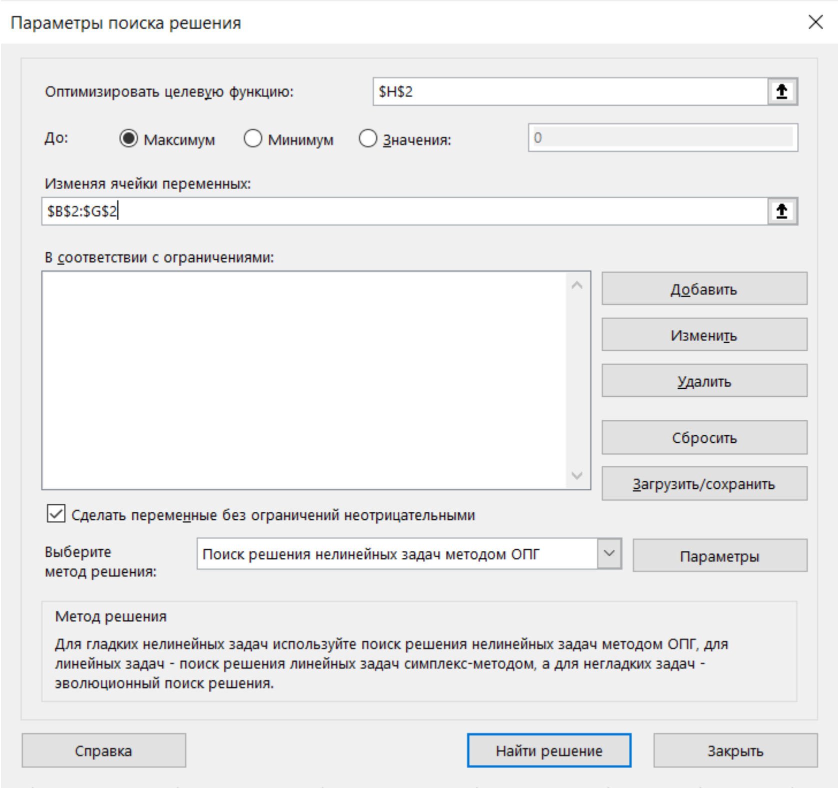



Рис. 1.5. Информация о целевой функции и изменяемых ячейках

Теперь все готово для добавления в модель ограничений. Нажмем **Добавить**. Откроется диалоговое окно **Добавление ограничения** (рис. 1.6).

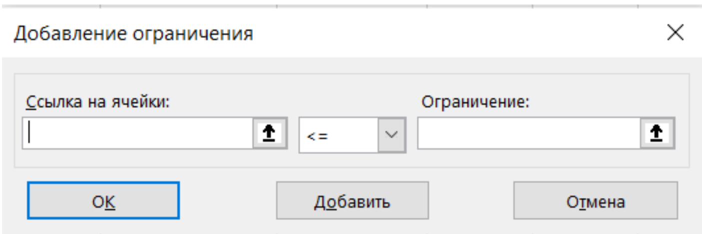



Рис. 1.6. Диалоговое окно **Добавление ограничения**

Для добавления ограничений по ресурсам в поле **Ссылка на ячейки** выберем диапазон H7:H8. Затем выберем из среднего списка знак <=, затем в поле **Ограничение** внесем диапазон I7:I8. Диалоговое окно **Добавление ограничений** примет вид как на рис. 1.7.

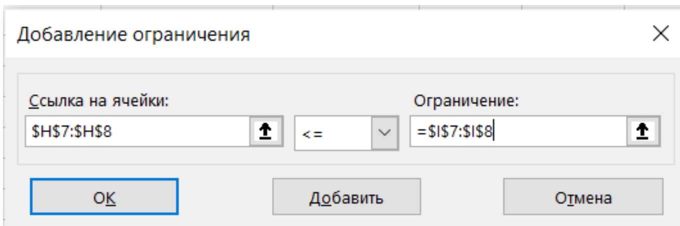



Рис. 1.7. Построение ограничения на использование ресурсов

Эти условия гарантируют, что при выборе различных значений для изменяемых ячеек будут приниматься во внимание только комбинации, удовлетворяющие как условию H7<=I7 (используемое время не превышает доступное рабочее время), так и условию H8<=I8 (объем используемого сырья не превышает имеющийся в наличие объем сырья). Нажимаем **Добавить,** и ограничения сформированы.

Заполняем аналогичным образом новое диалоговое окно **Добавление ограничений** (рис. 1.8).

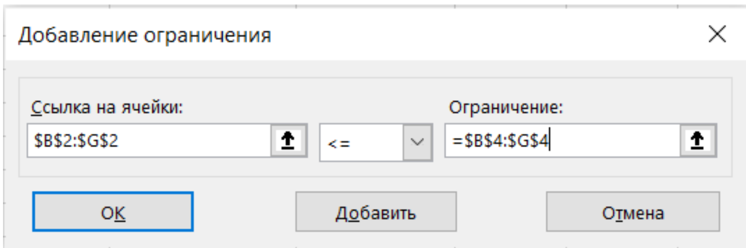



Рис. 1.8. Построение ограничения на спрос на препараты

Добавление этих ограничений гарантирует, что при подборе различных значений для изменяемых ячеек будут учитываться только комбинации, удовлетворяющие следующим условиям:

– B2<=B4 (количество произведенного препарата 1 не превосходит потребности в препарате 1);

– C2<=C4 (количество произведенного препарата 2 не превосходит потребности в препарате 2);

– D2<=D4 (количество произведенного препарата 3 не превосходит потребности в препарате 3);

– E2<=E4 (количество произведенного препарата 4 не превосходит потребности в препарате 4);

– F2<=F4 (количество произведенного препарата 5 не превосходит потребности в препарате 5);

– G2<=G4 (количество произведенного препарата 6 не превосходит потребности в препарате 6).

В диалоговом окне **Добавление ограничений** нажимаем **ОК**. Включение флажка **Сделать переменные без ограничений неотрицательными** гарантирует, что значения во всех изменяемых ячейках будут больше или равны нулю. Диалоговое окно **Параметры поиска решения** должно выглядеть как на рис. 1.9.

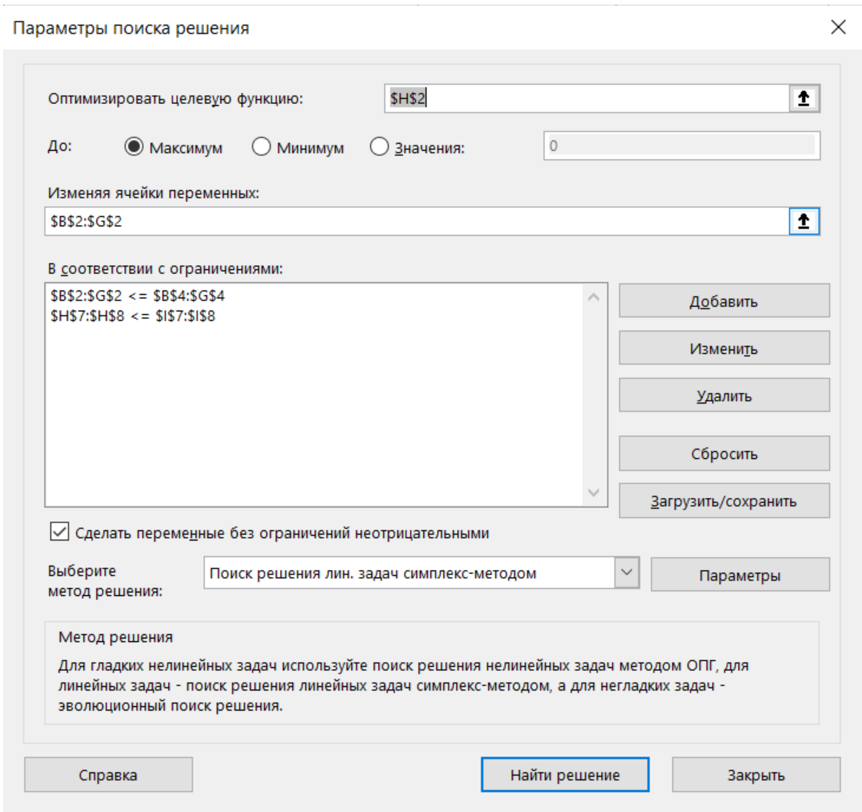



Рис. 1.9. Заполненное диалоговое окно **Параметры поиска решения**

Затем выберем в списке **Выберите метод решения** вариант **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**. Его необходимо выбрать потому, что задача выбора ассортимента продукции представляет собой особый тип задачи поиска решения, называемый *линейной моделью*. Модель поиска решения является линейной при следующих условиях:

– значение в целевой ячейке вычисляется путем суммирования членов в виде (*изменяемая ячейка*) × (*константа*);

– каждое ограничение удовлетворяет требованию линейной модели. Это означает, что каждое ограничение вычисляется путем суммирования членов в виде (*изменяемая ячейка*) × (*константа*) и сравнения суммы с константой.

Таким образом, задача поиска решения для выбора ассортимента является линейной задачей. Значение целевой ячейки (суммарная прибыль) вычисляется следующим образом:

$$(\text{прибыль с грамма препарата } 1)\times(\textit{количество препарата } 1)+$$
$$+(\text{прибыль с грамма препарата } 2)\times(\textit{количество препарата } 2)+\ldots+$$
$$+(\text{прибыль с грамма препарата } 6)\times(\textit{количество препарата } 6).$$

Это соответствует образцу, в котором значение в целевой ячейке получается путем суммирования членов в виде (*изменяемая ячейка*) × (*константа*).

Ограничения по рабочему времени вычисляются путем сравнения значения выражения

$$(\textit{рабочее время для производства грамма препарата } 1) \times$$
$$\times (\textit{количество граммов препарата } 1) +$$
$$+ (\textit{рабочее время для производства грамма препарата } 2) \times$$
$$\times (\textit{количество граммов препарата } 2) + \ldots +$$
$$+ (\textit{рабочее время для производства грамма препарата } 6) \times$$
$$\times (\textit{количество граммов препарата } 6)$$

с доступным количеством рабочего времени.

Следовательно, ограничение по рабочему времени вычисляется путем сложения членов в виде $(\textit{изменяемая ячейка}) \times (\textit{константа})$ и последующего сравнения суммы с константой. И ограничения по рабочему времени, и ограничения по сырью удовлетворяют требованиям линейной модели.

Ограничения по потребностям в препарате принимают следующий вид:

$$(\textit{количество произведенного препарата } 1) \le (\textit{потребность в препарате } 1),$$
$$(\textit{количество произведенного препарата } 2) \le (\textit{потребность в препарате } 2),$$
$$\ldots$$
$$(\textit{количество произведенного препарата } 6) \le (\textit{потребность в препарате } 6).$$

Каждое ограничение по потребности в препарате также удовлетворяет требованиям линейной модели, поскольку оно вычисляется сравнением изменяемой ячейки с константой. Поскольку представленная модель является линейной, то выбор для ее решения симплекс-метода гарантирует эффективный алгоритм поиска оптимального плана.

Нажав **Найти решение**, для построенной модели будет найдено оптимальное решение (рис. 1.10). Выбираем **Сохранить найденное решение** для сохранения значений оптимального решения на листе.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Ассортимент выпускаемых препаратов | Медицинский препарат 1 | Медицинский препарат 2 | Медицинский препарат 3 | Медицинский препарат 4 | Медицинский препарат 5 | Медицинский препарат 6 | Суммарная прибыль | |
| 2 | Оптимальный план | 0 | 0 | 0 | 596,67 | 1084 | 0 | 6625,2 | |
| 3 | Прибыль | 6 | 5,3 | 5,4 | 4,2 | 3,8 | 1,8 | | |
| 4 | Потребность в препарате | 960 | 928 | 1041 | 977 | 1084 | 1055 | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | Ресурсы | Расход ресурсов на производство одного грамма препарата | | | | | | Используемые ресурсы | Доступные ресурсы |
| 7 | Рабочее время | 6 | 5 | 4 | 3 | 2,5 | 1,5 | 4500 | 4500 |
| 8 | Сырье | 3,2 | 2,6 | 1,5 | 0,8 | 0,7 | 0,3 | 1236,13 | 1600 |
| 9 | | | | | | | | | |

Рис. 1.10. Оптимальное решение задачи

Фармацевтическая компания может получить максимальную ежемесячную прибыль 6 625,2 тыс. р., если будет производить 596,67 г медицинского препарата 4 и 1 084 г медицинского препарата 5. Единственное, что можно утверждать: в этом месяце невозможно получить прибыль свыше 6 625,2 тыс. р. при ограничениях на ресурсы и данном спросе на препараты.

### *Задания для самостоятельной работы*

1. *Shoeco* производит три типа обуви. Спрос на обувь неограничен, и доступны 40 ч в неделю машинного времени и рабочего времени. В таблице указана прибыль от продажи одной пары обуви и количество затраченного машинного и рабочего времени. При условии, что количество пар обуви – это целое число, как *Shoeco* может максимизировать свою еженедельную прибыль?

| Показатель | Обувь 1 | Обувь 2 | Обувь 3 |
|---|---|---|---|
| Прибыль (долл.) | 40 | 25 | 30 |
| Рабочее время (мин) | 40 | 20 | 30 |
| Машинное время (мин) | 45 | 25 | 25 |

2. *Woodco* производит столы и стулья. В таблице указана прибыль от продажи единицы товара, количество используемой древесины (в квадратных метрах) и количество часов, требуемое опытному плотнику для производства одной единицы выпускаемой продукции.

| Показатель | Стол | Стул |
|---|---|---|
| Прибыль (долл.) | 250 | 150 |
| Древесина ($м^2$) | 22 | 18 |
| Время работы плотника (ч) | 14 | 8 |

Производится целое число столов и стульев, а спрос на выпускаемую продукцию неограничен. Как *Woodco* может максимизировать еженедельную прибыль?

## 1.2. Поиск решения при планировании расписания работы сотрудников

Многие организации (например, банки, рестораны, почтовые службы) имеют различную потребность в рабочей силе в разные дни недели, поэтому им необходим эффективный метод для составления расписания своих работников. Для решения такой задачи планирования расписания работы сотрудников можно использовать инструмент **Поиск решения**.

***Пример 1.2.*** В Bank 24 чеки обрабатываются семь дней в неделю. Количество работников, необходимое для ежедневной обработки чеков, приведено в таблице.

| Показатель | Понедельник | Вторник | Среда | Четверг | Пятница | Суббота | Воскресенье |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество сотрудников | 17 | 13 | 15 | 17 | 9 | 9 | 12 |

Все служащие банка работают пять дней подряд. Какое минимальное количество сотрудников покрывает потребность банка в рабочей силе?

Начнем с определения целевой ячейки, изменяемых ячеек и ограничений для модели решения:

– **целевая ячейка** – минимальное количество служащих банка;

– **изменяемые ячейки** – количество служащих банка, которые начинают работу (в первый из пяти подряд идущих дней) в конкретный день недели. Значение в каждой ячейке должно быть неотрицательным числом;

– **ограничения** – для каждого дня недели количество работающих служащих должно быть больше или равно требуемому количеству служащих.

Для создания компьютерной модели этой задачи нужно отслеживать количество служащих, работающих каждый день. Используя этот факт, внесем всю известную информацию в MS Excel (рис. 1.11). В ячейках B9:H9 укажем пробное (начальное) количество сотрудников банка, которые начинают работать в каждый день недели. Например, в ячейке B9 введено значение 1, показывающее, что в понедельник к работе приступает один служащий, который проработает с понедельника по пятницу. Ежедневное необходимое количество работников в банке указано в диапазоне J2:J8.

Для отслеживания количества служащих банка, работающих каждый день, в каждую ячейку диапазона B2:H8 внесем 1 или 0. Значение 1 указывает, что сотрудники, приступившие к работе в день, связанный со столбцом, работают в день, связанный со строкой. Например, 1 в ячейке B6 показывает, что служащие, которые начали работать в понедельник, работают и в пятницу; 0 в ячейке B7 показывает, что служащие, которые начали работать в понедельник, не работают в субботу.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Расписание сотрудников* | *понедельник* | *вторник* | *среда* | *четверг* | *пятница* | *суббота* | *воскресенье* | *Всего сотрудников в банке* | *Необходимое количество сотрудников* |
| 2 | *понедельник* | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 17 |
| 3 | *вторник* | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | | 13 |
| 4 | *среда* | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 15 |
| 5 | *четверг* | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 17 |
| 6 | *пятница* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 9 |
| 7 | *суббота* | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | | 9 |
| 8 | *воскресенье* | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 12 |
| 9 | *Ежедневное оптимальное количество сотрудников* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |

Рис. 1.11. Исходная информация при планировании расписания сотрудников

Количество служащих банка, работающих каждый день, вычисляется по формуле =СУММПРОИЗВ($B$9:$H$9;B2:H2). Аналогичным образом производится расчет количества сотрудников, находящихся каждый день в банке (рис. 1.12).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Расписание сотрудников* | *понедельник* | *вторник* | *среда* | *четверг* | *пятница* | *суббота* | *воскресенье* | *Всего сотрудников в банке* | *Необходимое количество сотрудников* |
| 2 | *понедельник* | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 17 |
| 3 | *вторник* | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 5 | 13 |
| 4 | *среда* | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 | 15 |
| 5 | *четверг* | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 | 17 |
| 6 | *пятница* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 5 | 9 |
| 7 | *суббота* | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 9 |
| 8 | *воскресенье* | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 12 |
| 9 | *Ежедневное оптимальное количество сотрудников* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |

Рис. 1.12. Вычисление количества служащих банка, работающих каждый день

Для вычисления общего количества служащих банка просуммируем диапазон B9:H9, используя формулу =СУММ(B9:H9) в ячейке B11 (рис. 1.13)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Расписание сотрудников* | *понедельник* | *вторник* | *среда* | *четверг* | *пятница* | *суббота* | *воскресенье* | *Всего сотрудников в банке* | *Необходимое количество сотрудников* |
| 2 | *понедельник* | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 17 |
| 3 | *вторник* | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 5 | 13 |
| 4 | *среда* | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 | 15 |
| 5 | *четверг* | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 | 17 |
| 6 | *пятница* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 5 | 9 |
| 7 | *суббота* | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 9 |
| 8 | *воскресенье* | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 12 |
| 9 | *Ежедневное оптимальное количество сотрудников* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | *Общее количество служащих* | 7 | | | | | | | | |

Рис. 1.13. Вычисление общего числа служащих банка

Заполним диалоговое окно **Параметры поиска решения**. Целевую ячейку B11 будем минимизировать, согласно условию задачи. Ограничения I2:I8>=J2:J8 гарантируют, что количество работающих каждый день сотрудников не меньше количества необходимых каждый день сотрудников. Ограничения B9:H9=целое гарантирует, что количество приступающих каждый день к работе служащих является целым числом. Для добавления этого ограничения в диалоговом окне **Параметры поиска решения** заполним диалоговое окно **Добавление ограничения** следующим образом (рис. 1.14)

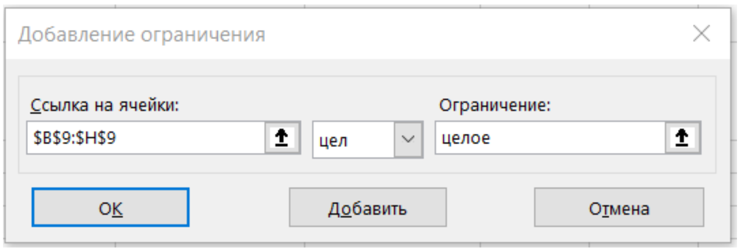



Рис. 1.14. Построение ограничения, гарантирующего целое решение задачи

Таким образом, приходим к следующей компьютерной модели (рис. 1.15).

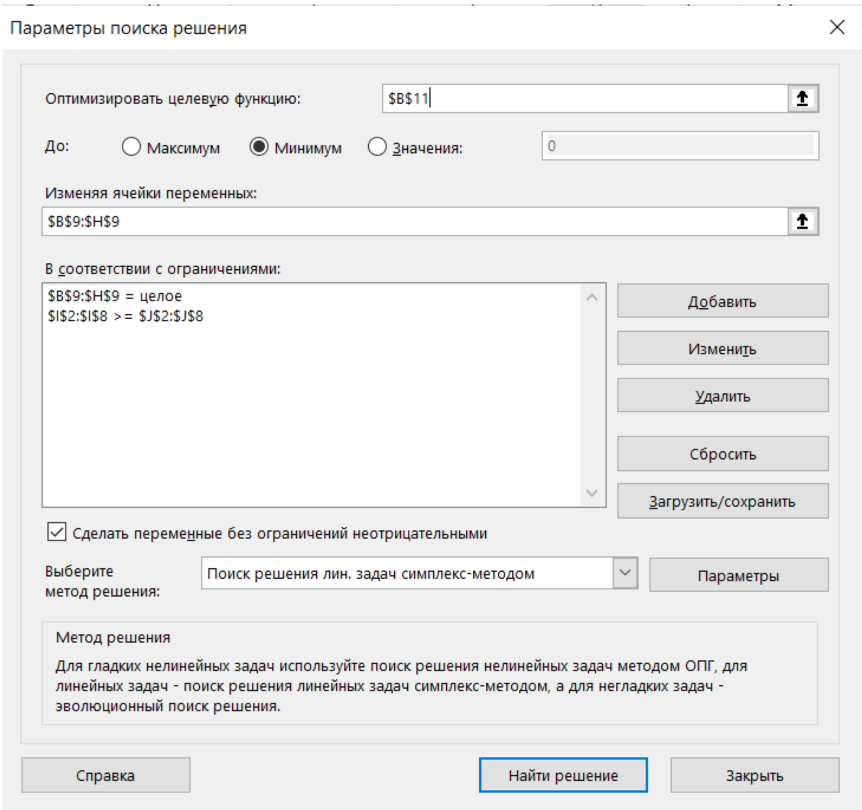



Рис. 1.15. Заполненное диалоговое окно **Параметры поиска решения**

Обратим внимание, что построенная модель является линейной, поскольку значение в целевой ячейке создается путем суммирования значений в изменяемых ячейках, а ограничения создаются путем сравнения значений в изменяемых ячейках, умноженных на константу (или 1 или 0), с требуемым количеством служащих. Следовательно, для нахождения оптимального решения выберем симплекс-метод. После нажатия **Найти решение** появится оптимальное решение, показанное на рис. 1.16.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Расписание сотрудников* | *понедельник* | *вторник* | *среда* | *четверг* | *пятница* | *суббота* | *воскресенье* | *Всего сотрудников в банке* | *Необходимое количество сотрудников* |
| 2 | *понедельник* | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 17 |
| 3 | *вторник* | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 14 | 13 |
| 4 | *среда* | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 17 | 15 |
| 5 | *четверг* | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 17 | 17 |
| 6 | *пятница* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 9 | 9 |
| 7 | *суббота* | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 9 | 9 |
| 8 | *воскресенье* | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 12 |
| 9 | *Ежедневное оптимальное количество сотрудников* | 3 | 0 | 3 | 3 | 0 | 3 | 8 | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | *Общее количество служащих* | 20 | | | | | | | | |

Рис. 1.16. Оптимальное решение задачи

Согласно оптимальному планированию расписания с учетом всех требований, для такой работы в банке понадобится 20 служащих. Три сотрудника приступают к работе в понедельник, три – в среду, три – в четверг, три – в субботу и восемь – в воскресенье.

### ***Задания для самостоятельной работы***

1. В Bank 24 чеки обрабатываются семь дней в неделю. Количество работников, необходимое для ежедневной обработки чеков, приведено в таблице.

| Показатель | Понедельник | Вторник | Среда | Четверг | Пятница | Суббота | Воскресенье |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество сотрудников | 17 | 13 | 15 | 17 | 9 | 9 | 12 |

Всего на работу принято 22 служащих, и нужно составить расписание с максимальным количеством выходных дней для служащих в субботу и в воскресенье. Как это сделать?

2. В Bank 24 чеки обрабатываются семь дней в неделю. Количество работников, необходимое для ежедневной обработки чеков приведено в таблице.

| Показатель | Понедельник | Вторник | Среда | Четверг | Пятница | Суббота | Воскресенье |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество сотрудников | 17 | 13 | 15 | 17 | 9 | 9 | 12 |

Служащие Bank 24 получают 150 долл. в день за работу в первые пять дней и 350 долл. за переработку. Каким образом банк должен составить расписание?

3. В таблице указано количество телефонных операторов, необходимое авиакомпании в течение рабочего дня. Каждый оператор работает в одну из шестичасовых смен: 00:00 – 06:00, 06:00 – 12:00, 12:00 – 18:00, 18:00 – 24:00. Каково минимальное требуемое количество операторов?

| Время | Требуемое количество операторов |
|---|---|
| 00:00 – 04:00 | 12 |
| 04:00 – 08:00 | 16 |
| 08:00 – 12:00 | 22 |
| 12:00 – 16:00 | 30 |
| 16:00 – 20:00 | 31 |
| 20:00 – 24:00 | 22 |

4. В таблице приведено количество людей (млн) в различных демографических группах, которые смотрят телепередачи, а также количество людей (млн) в каждой демографической группе, которым рекламодатель хотел бы показать рекламу.

| Передача | Мужчины в возрасте | | | Женщины в возрасте | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 18–35 | 36–55 | старше 55 | 18–35 | 36–55 | старше 55 |
| Однажды в сказке | 6,0 | 3,0 | 1,0 | 9,0 | 4,0 | 2,0 |
| Викинги | 6,0 | 5,0 | 3,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 |
| Чужестранка | 5,0 | 2,0 | 0 | 4,0 | 2,0 | 0 |
| МАТЧ! | 0,5 | 0,5 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | 0 |
| МУЗ ТВ | 0,7 | 0,2 | 0 | 0,9 | 0,1 | 0 |
| Discovery | 0,1 | 0,1 | 0 | 0,6 | 1,3 | 0,4 |
| НТВ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |
| Гранд | 1,0 | 2,0 | 4,0 | 1,0 | 3,0 | 4,0 |
| Объем желательной аудитории для рекламы | 60,0 | 60,0 | 28,0 | 60,0 | 60,0 | 28,0 |

Стоимость (тыс. долл.) размещения 30-секундной рекламы в каждой передаче приведена в следующей таблице.

| Показатель | Однажды в сказке | Викинги | Чужестранка | МАТЧ! | МУЗ ТВ | Discovery | НТВ | Гранд |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Стоимость размещения рекламы | 160 | 140 | 150 | 100 | 90 | 70 | 85 | 100 |

Каков наиболее дешевый способ достижения цели?

### 1.3. Поиск решения для задач транспортировки и распределения

Многие компании производят свои продукты в различных местах (часто называемых *точками поставки*) и отправляют свою продукцию заказчикам (в так называемые *точки спроса*). Возникает естественный вопрос: «Как дешево произвести и доставить продукцию заказчикам, удовлетворив при этом потребность в спросе?» Такой тип задач называется транспортной задачей, которая может быть представлена в виде линейной модели для инструмента **Поиск решения** следующим образом:

– **целевая ячейка –** минимизация общей стоимости производства продукции и транспортных расходов;

– **изменяемые ячейки –** количество произведенной продукции в каждой точке поставке, отправляемое в каждую точку спроса;

– **ограничения –** количество, отправляемое из каждой точки поставки, не может превышать производственные мощности соответствующего завода. Спрос должен быть удовлетворен в каждой точке спроса. Кроме того, значение в каждой изменяемой ячейке не может быть отрицательным.

***Пример 1.3.*** Фармацевтическая компания производит некий препарат на своих заводах в Лос-Анджелесе, Атланте и Нью-Йорке. Каждый месяц завод в Лос-Анджелесе может произвести 10 000 фунтов препарата. В Атланте может произвести 12 000 фунтов и в Нью-Йорке – 14 000 фунтов. Каждый месяц компания должна отправлять препарат в четыре региона США: на Восток, Средний Запад, Юг и Запад в количестве 9 000, 6 000, 6 000 и 13 000 фунтов соответственно. Стоимость производства фунта препарата на каждом заводе и доставки его в каждый регион страны указана в таблице.

| Завод | Стоимость производства и доставки одного фунта препарата, долл. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Восток | Средний Запад | Юг | Запад |
| Лос-Анджелес | 5,0 | 3,5 | 4,2 | 2,2 |
| Атланта | 3,2 | 2,6 | 1,8 | 4,8 |
| Нью-Йорк | 2,5 | 3,1 | 3,3 | 5,4 |

Каков наиболее дешевый способ поставки требуемого количества препарата в каждый регион?

Для построения целевой ячейки необходимо найти общие транспортные расходы. Внесем в MS Excel всю необходимую для этого информацию, определив пробный план транспортировки препарата и расходы, связанные с перевозкой продукции (рис. 1.17).

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Транспортные и производственные расходы* | *Восток* | *Средний Запад* | *Юг* | *Запад* |
| 2 | *Лос-Анжелес* | 5 | 3,5 | 4,2 | 2,2 |
| 3 | *Атланта* | 3,2 | 2,6 | 1,8 | 4,8 |
| 4 | *Нью-Йорк* | 2,5 | 3,1 | 3,3 | 5,4 |
| 5 | | | | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | *План перевозок* | *Восток* | *Средний Запад* | *Юг* | *Запад* |
| 8 | *Лос-Анжелес* | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | *Атланта* | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | *Нью-Йорк* | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | | | | | |

Рис. 1.17. Исходная информация транспортной задачи

Общие транспортные расходы вычисляются по формуле:

(*количество, отправленное из Лос-Анджелеса на Восток*) ×
×(*стоимость фунта препарата,*
*отправленного из Лос-Анджелеса на Восток*)+
+(*количество, отправленное из Лос-Анджелеса на Средний Запад*) ×
× (*стоимость фунта препарата, отправленного*
*из Лос-Анджелеса на Средний Запад*) +
+(*количество, отправленное из Лос-Анджелеса на Юг*) ×
× (*стоимость фунта препарата, отправленного*
*из Лос-Анджелеса на Юг*) +
+(*количество, отправленное из Лос-Анджелеса на Запад*) ×
× (*стоимость фунта препарата,*
*отправленного из Лос-Анджелеса на Запад*)+…+
+(*количество, отправленное из Нью-Йорка на Запад*) ×
× (*стоимость фунта препарата, отправленного*
*из Нью-Йорка на Запад*).

Таким образом, общие транспортные и производственные расходы можно вычислить в ячейке B15 по формуле =СУММПРОИЗВ(B2:E4;B8:E10).

Для построения ограничений сначала необходимо вычислить количество препарата, вывозимое из каждого города и привозимое в каждый регион, используя функцию СУММ. Таким образом, получаем следующую таблицу.

| План перевозок | Восток | Средний Запад | Юг | Запад | Вывоз |
|---|---|---|---|---|---|
| Лос-Анджелес | 1 | 1 | 1 | 1 | =СУММ(B8:E8) |
| Атланта | 1 | 1 | 1 | 1 | =СУММ(B9:E9) |
| Нью-Йорк | 1 | 1 | 1 | 1 | =СУММ(B10:E10) |
| Привоз | =СУММ (B8:B10) | =СУММ (C8:C10) | =СУММ (D8:D10) | =СУММ (E8:E10) | |

Указав количество препарата, которое имеется в наличии в каждом городе и которое необходимо привезти в каждый регион, получим (рис. 1.18):

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Транспортные и производственные расходы* | *Восток* | *Средний Запад* | *Юг* | *Запад* | | |
| 2 | *Лос-Анжелес* | 5 | 3,5 | 4,2 | 2,2 | | |
| 3 | *Атланта* | 3,2 | 2,6 | 1,8 | 4,8 | | |
| 4 | *Нью-Йорк* | 2,5 | 3,1 | 3,3 | 5,4 | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | *План перевозок* | *Восток* | *Средний Запад* | *Юг* | *Запад* | *Вывоз* | *Запас* |
| 8 | *Лос-Анжелес* | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 10000 |
| 9 | *Атланта* | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 12000 |
| 10 | *Нью-Йорк* | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 14000 |
| 11 | *Привоз* | 3 | 3 | 3 | 3 | | |
| 12 | *Спрос* | 9000 | 6000 | 6000 | 13000 | | |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | |
| 15 | *Общие транспортные и производственные расходы* | 41,6 | | | | | |

Рис. 1.18. Необходимая информация для построения компьютерной модели

Открыв диалоговое окно **Параметры поиска решения**, построим компьютерную модель задачи (рис. 1.19). Поскольку целью поставленной задачи является минимизация общих транспортных и производственных расходов, то в качестве целевой ячейки определяем B15. Изменяемые ячейки должны содержать количество препарата в фунтах, отправленное из каждого города в каждый регион (ячейки B8:E10). Ограничение F8:F10<=G8:G10 (ограничение по поставке) гарантирует, что количество препарата, отправленного с каждого завода, не превысит производственную мощность этого завода. Ограничение B11:E11>=B12:E12 (ограничение по спросу) гарантирует получение каждым регионом требуемого количества препарата.

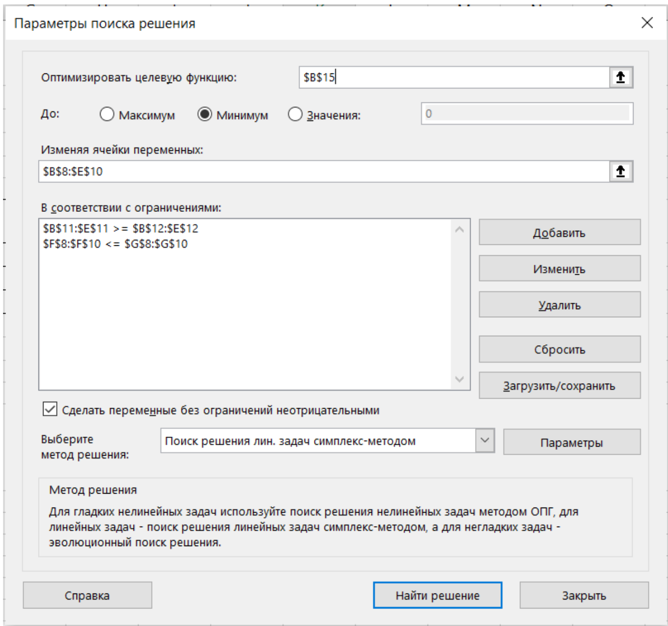



Рис. 1.19. Заполненное диалоговое окно **Параметры поиска решения**

Эта модель является линейной, так как значение в целевой ячейке определяется путем суммирования членов в виде ((изменяемая ячейка) × × (*константа*)), и оба ограничения, как по поставке, так и по спросу, созданы путем сравнения суммы значений в изменяемых ячейках с константой. Так как модель является линейной, то для ее решения выбираем симплекс-метод, поставив флажок **Сделать переменные без ограничений неотрицательными**.

После нажатия кнопки **Найти решение** получили оптимальное решение транспортной задачи (рис. 1.20).

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Транспортные и производственные расходы* | *Восток* | *Средний Запад* | *Юг* | *Запад* | | |
| 2 | *Лос-Анжелес* | 5 | 3,5 | 4,2 | 2,2 | | |
| 3 | *Атланта* | 3,2 | 2,6 | 1,8 | 4,8 | | |
| 4 | *Нью-Йорк* | 2,5 | 3,1 | 3,3 | 5,4 | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | *План перевозок* | *Восток* | *Средний Запад* | *Юг* | *Запад* | *Вывоз* | *Запас* |
| 8 | *Лос-Анжелес* | 0 | 0 | 0 | 10000 | 10000 | 10000 |
| 9 | *Атланта* | 0 | 3000 | 6000 | 3000 | 12000 | 12000 |
| 10 | *Нью-Йорк* | 9000 | 3000 | 0 | 0 | 12000 | 14000 |
| 11 | *Привоз* | 9000 | 6000 | 6000 | 13000 | | |
| 12 | *Спрос* | 9000 | 6000 | 6000 | 13000 | | |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | |
| 15 | *Общие транспортные и производственные расходы* | 86800 | | | | | |

Рис. 1.20. Оптимальное решение задачи

Минимальные расходы на удовлетворение спроса заказчиков составляют 86 800 долл. Такой минимум может быть достигнут, если компания использует следующий план производства и транспортировки:

– отправка 10 000 фунтов препарата из Лос-Анджелеса на Запад;

– отправка 30 000 фунтов препарата из Атланты на Средний Запад и отправка такого же количества препарата из Атланты на Запад. Отправка 6 000 фунтов препарата из Атланты на Юг;

– отправка 9 000 фунтов препарата из Нью-Йорка на Восток и отправка 3 000 фунтов препарата из Нью-Йорка на Средний Запад.

***Пример 1.4.*** Менеджер-координатор аудиторской фирмы должен распределить аудиторов для работы на следующий месяц. Аудиторы различаются по квалификации и опыту работы. Прежде чем приступить к аудиту конкретной фирмы, они должны затратить определенное время на подготовку и консультации. В данный момент имеются заявки от десяти клиентов. Менеджер-координатор, учитывая опыт работы аудиторов каждой конторы, оценил время, необходимое «среднему» аудитору каждой конторы для подготовки к аудиту конкретного клиента. Результаты представлены в таблице.

| Контора | Клиент | | | | | | | | | | Число сотрудников |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| «Гапавилл» | 8 | 21 | 15 | 13 | 9 | 17 | 18 | 7 | 26 | 9 | 35 |
| «Финанстаун» | 14 | 18 | 17 | 19 | 12 | 6 | | 15 | 24 | 13 | 20 |
| «Исабург» | 9 | 15 | 18 | 16 | 16 | 15 | 11 | 13 | 21 | 19 | 25 |
| «Нью-Баланс» | 11 | | 14 | 7 | 23 | 9 | 6 | 18 | | 7 | 10 |
| Заявки | 4 | 9 | 2 | 12 | 7 | 6 | 9 | 3 | 18 | 5 | |

1. Распределите аудиторов так, чтобы суммарные временные затраты на подготовку были минимальны. Пропуски в некоторых клетках таблицы означают, что аудиторы данной конторы не имеют опыта аудита в отрасли, к которой относится данный клиент, и не должны к нему посылаться.

2. Найдите оптимальное распределение аудиторов в случае, если назначение клиенту аудиторов только из одной конторы нежелательно.

В данном случае мы имеем дело с транспортной задачей, так как аудиторы из одной конторы могут быть назначены разным клиентам одновременно, т.е. мы не ищем соответствия контора – клиент. Следовательно, в задаче требуется найти, сколько аудиторов из «Гапавилла» будет назначено 1, 2, 3, …, 10-му клиенту, сколько аудиторов из «Финанстауна» будет назначено 1, 2, 3, …, 10-му клиенту и т.д. для остальных контор. В соответствии с этим в задаче должно быть не менее 40 переменных (4 конторы × 10 клиентов).

В качестве примера организации данных на листе MS Excel можно предложить следующую таблицу (рис. 1.21).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Котнтора* | *Клиенты* | | | | | | | | | | *Число сотрудников* |
| 2 | | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | |
| 3 | *"Гапавилл"* | 8 | 21 | 15 | 13 | 9 | 17 | 18 | 7 | 26 | 9 | 35 |
| 4 | *"Финанстаун"* | 14 | 18 | 17 | 19 | 12 | 6 | 99 | 15 | 24 | 13 | 20 |
| 5 | *"Исабург"* | 9 | 15 | 18 | 16 | 16 | 15 | 11 | 13 | 21 | 19 | 25 |
| 6 | *"Нью-Баланс"* | 11 | 99 | 14 | 7 | 23 | 9 | 6 | 18 | 99 | 7 | 10 |
| 7 | *Заявки* | 4 | 9 | 2 | 12 | 7 | 6 | 9 | 3 | 18 | 5 | |
| 8 | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | |
| 10 | *Котнтора* | *Клиенты* | | | | | | | | | | *Число сотрудников, отправленное клиентам* |
| 11 | | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | |
| 12 | *"Гапавилл"* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 |
| 13 | *"Финанстаун"* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 |
| 14 | *"Исабург"* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 |
| 15 | *"Нью-Баланс"* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 |
| 16 | *Выполненные заявки* | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | |
| 17 | | | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | | | |
| 19 | *Суммарные временные затраты* | 826 | | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | |

=СУММ(B12:B15)

=СУММ(B12:K12)

=СУММПРОИЗВ(B12:K15;B3:K6)

Рис. 1.21. Исходная информация задачи

Обратите внимание на изменение исходной таблицы временных затрат на подготовку к аудиту. В пустых ячейках поставлено число 99. Эти изменения связаны с необходимостью запретить назначение аудиторов из «Финанстауна» седьмому клиенту и аудиторов из «Нью-Баланса» второму и девятому клиентам. Здесь уместно напомнить, что в транспортной задаче не должно быть лишних ограничений. По существу, их всего два: все заказы должны быть в точности исполнены и все аудиторы должны быть распределены по клиентам. Поэтому писать в ограничениях **Поиска решения** что-то вроде «переменная C15=0» не следует. Нужно просто задать в таблице такое произвольное значение времени подготовки, чтобы **Поиск решения** сам отказался от нежелательных для нас назначений. Так как в этом примере необходимо найти минимальные суммарные временные затраты, то следует, очевидно, записать в пустые ячейки какие-нибудь числа, гораздо большие самого большого числа в таблице. Поскольку это число равно 26, следовательно, можно эффективно запретить назначения, записав в пустые ячейки 100, или 1 000, или 10 000 и т.д. Мы поставили 99 исключительно с целью уменьшить ширину таблицы для данной книги.

Если бы целью задачи был поиск максимума (допустим, речь шла о прибыли), то для запрещения следовало бы использовать число, гораздо меньшее наименьшего из таблицы, в том числе и отрицательное.

Чтобы рассчитать реальные издержки времени на подготовку для всех контор в сумме, запишем в ячейку B19 формулу =СУММПРОИЗВ(B12:K15;B3:K6). Это и будет целевая ячейка задачи.

Для построения компьютерной модели задачи сформируем стандартные ограничения транспортной задачи. Для этого сделаем расчеты: в ячейках B16:L16 запишем, сколько всего аудиторов назначено каждому клиенту, а в ячейках L12:L15 запишем, сколько аудиторов каждой конторы распределено. Поскольку число сотрудников в четырех конторах составляет 90 человек, а заявки поступили только на 75 человек, то эти факты необходимо отразить при формировании ограничений (рис. 1.22, 1.23).

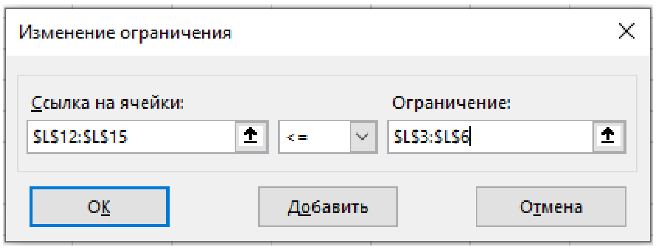



Рис. 1.22. Ограничение с учетом ограниченности числа сотрудников в конторах

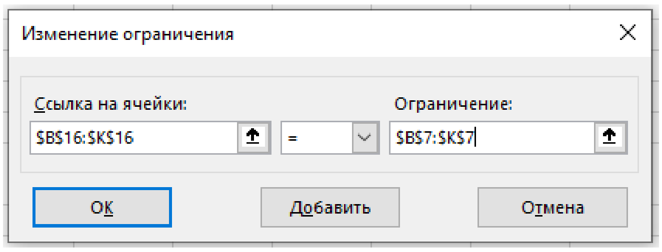



Рис. 1.23. Ограничение с учетом ограниченности числа заявок клиентов

Как обычно, при построении компьютерной модели в диалоговом окне **Параметры поиска решения** отметим галочкой **Сделать переменные без ограничений неотрицательными** и выберем для решения построенной задачи симплекс-метод (рис. 1.24).

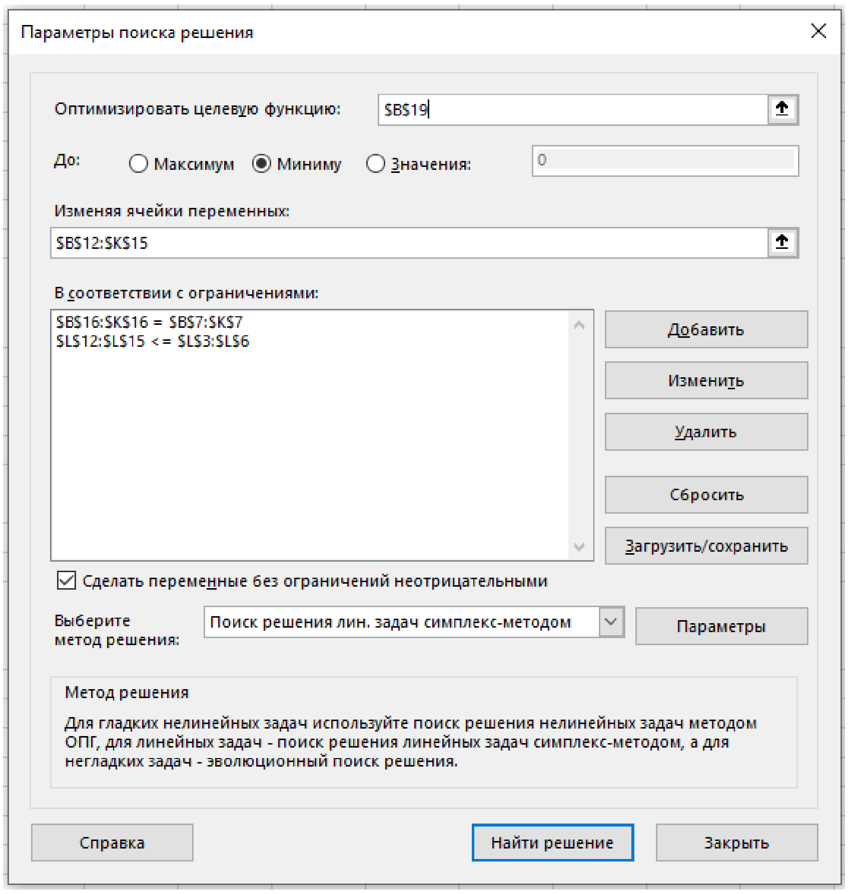



Рис. 1.24. Заполненное диалоговое окно **Параметры поиска решения**

После запуска **Поиска решения** получаем следующий результат (рис. 1.25).

| Котнтора | Клиенты | | | | | | | | | | Число сотрудников |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| "Гапавилл" | 8 | 21 | 15 | 13 | 9 | 17 | 18 | 7 | 26 | 9 | 35 |
| "Финанстаун" | 14 | 18 | 17 | 19 | 12 | 6 | 99 | 15 | 24 | 13 | 20 |
| "Исабург" | 9 | 15 | 18 | 16 | 16 | 15 | 11 | 13 | 21 | 19 | 25 |
| "Нью-Баланс" | 11 | 99 | 14 | 7 | 23 | 9 | 6 | 18 | 99 | 7 | 10 |
| Заявки | 4 | 9 | 2 | 12 | 7 | 6 | 9 | 3 | 18 | 5 | |

| Котнтора | Клиенты | | | | | | | | | | Число сотрудников, отправленное клиентам |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| "Гапавилл" | 4 | 0 | 2 | 11 | 7 | 0 | 0 | 3 | 0 | 5 | 32 |
| "Финанстаун" | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 2 | 0 | 8 |
| "Исабург" | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 16 | 0 | 25 |
| "Нью-Баланс" | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| Выполненные заявки | 4 | 9 | 2 | 12 | 7 | 6 | 9 | 3 | 18 | 5 | |

| | |
|---|---|
| Суммарные временные затраты | 950 |

Рис. 1.25. Оптимальное решение задачи

Как мы видим, общие затраты составили 950 рабочих часов. При этом в работу не включены 3 аудитора из конторы «Гапавилл» и 12 аудиторов из конторы «Финанстаун»: в реальности эти аудиторы не будут заняты в предстоящий период.

Как мы можем убедиться, запрещения назначений, сделанные нами, также сработали правильно. При этом аудиторы «Гапавилла» назначены шести клиентам (1-му – 4, 3-му – 2, 4-му – 11, 5-му – 7, 8-му – 3 и 10-му – 5), а аудиторы «Финанстауна», «Исабурга» и «Нью-Баланса» – двум клиентам каждый.

Для всех клиентов, кроме 4-го и 9-го, все назначенные аудиторы принадлежат к одной и той же конторе.

Следующий вопрос в задаче предлагает построить распределение аудиторов таким образом, чтобы хотя бы один аудитор среди назначенных клиенту был из «второй» конторы. Для решения этой задачи добавим дополнительную таблицу на лист MS Excel (рис. 1.26). В ячейки B23:K26 запишем разницу между заказом клиента в целом и переменной задачи, т.е. в ячейке B23 стоит разность =$B$7-B12 и т.д.

| Котнтора | Клиенты | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| "Гапавилл" | 3 | 8 | 1 | 11 | 6 | 5 | 8 | 2 | 17 | 4 |
| "Финанстаун" | 3 | 8 | 1 | 11 | 6 | 5 | 8 | 2 | 17 | 4 |
| "Исабург" | 3 | 8 | 1 | 11 | 6 | 5 | 8 | 2 | 17 | 4 |
| "Нью-Баланс" | 3 | 8 | 1 | 11 | 6 | 5 | 8 | 2 | 17 | 4 |

=$B$7-B12

Рис. 1.26. Дополнительная информация задачи

Теперь добавим новое ограничение, позволяющее назначить каждому клиенту аудиторов не менее чем из двух контор. Судя по всему, такое решение существует, какой-нибудь пример такого решения можно найти и вручную. Однако оптимальное решение найдет только **Поиск решения**, после того как мы потребуем, чтобы все числа в таблице B23:K26 были больше 1 или равны 1 (ноль соответствует нежелательному назначению всех аудиторов из одной конторы) (рис. 1.27).

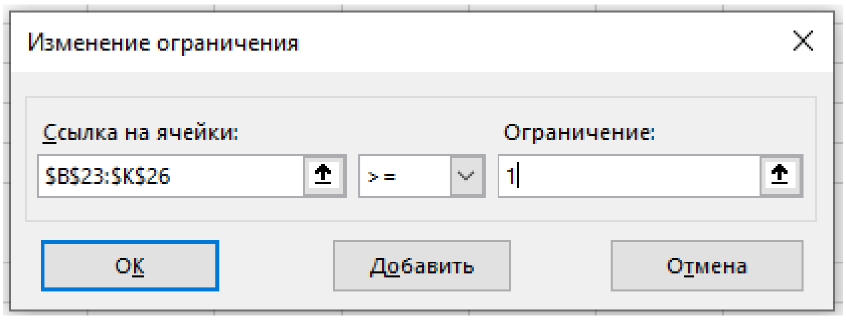



Рис. 1.27. Дополнительное ограничение задачи

После решения задачи получим следующий результат (рис. 1.28).

| Котнтора | Клиенты | | | | | | | | | | Число сотрудников |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| "Гапавилл" | 8 | 21 | 15 | 13 | 9 | 17 | 18 | 7 | 26 | 9 | 35 |
| "Финанстаун" | 14 | 18 | 17 | 19 | 12 | 6 | 99 | 15 | 24 | 13 | 20 |
| "Исабург" | 9 | 15 | 18 | 16 | 16 | 15 | 11 | 13 | 21 | 19 | 25 |
| "Нью-Баланс" | 11 | 99 | 14 | 7 | 23 | 9 | 6 | 18 | 99 | 7 | 10 |
| Заявки | 4 | 9 | 2 | 12 | 7 | 6 | 9 | 3 | 18 | 5 | |

| Котнтора | Клиенты | | | | | | | | | | Число сотрудников, отправленное клиентам |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| "Гапавилл" | 3 | 0 | 1 | 11 | 6 | 0 | 0 | 2 | 0 | 4 | 27 |
| "Финанстаун" | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 1 | 3 | 1 | 13 |
| "Исабург" | 1 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15 | 0 | 25 |
| "Нью-Баланс" | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 8 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| Выполненные заявки | 4 | 9 | 2 | 12 | 7 | 6 | 9 | 3 | 18 | 5 | |

| Суммарные временные затраты | 982 |
|---|---|

| Котнтора | Клиенты | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| "Гапавилл" | 1 | 9 | 1 | 1 | 1 | 6 | 9 | 1 | 18 | 1 |
| "Финанстаун" | 4 | 8 | 1 | 12 | 6 | 1 | 9 | 2 | 15 | 4 |
| "Исабург" | 3 | 1 | 2 | 12 | 7 | 6 | 8 | 3 | 3 | 5 |
| "Нью-Баланс" | 4 | 9 | 2 | 11 | 7 | 5 | 1 | 3 | 18 | 5 |

Рис. 1.28. Оптимальное решение задачи

Как мы видим, общее количество часов, затраченных на подготовку, выросло до 982. При этом во всех случаях аудиторы назначаются из двух контор. Несколько изменилось и количество неназначенных аудиторов: теперь из «Гапавилла» не задействованы 8 аудиторов, а из «Финанстауна» – только 7.

### *Задание для самостоятельной работы*

1. Магазин техники имеет на складах в Хьюстоне, Далласе и Сан-Антонио 50 газонокосилок. В текущем месяце будет продано 35 газонокосилок в Хьюстоне, Далласе, Сан-Антонио и Остине. Стоимость транспортировки газонокосилок с каждого склада в каждый город указана в таблице.

| Город | Хьюстон | Даллас | Сан-Антонио | Остин |
|---|---|---|---|---|
| Хьюстон | 1 долл. | 7 долл. | 5 долл. | 6 долл. |
| Даллас | 7 долл. | 1,5 долл. | 10 долл. | 9 долл. |
| Сан-Антонио | 8 долл. | 10 долл. | 2 долл. | 4 долл. |

Определите, как удовлетворить спрос при минимальных затратах.

## 1.4. Поиск решения для бюджетирования капиталовложений

Каждый год такие компании, как Eli Lilly, решают, какие препараты разрабатывать; как Microsoft, – какое программное обеспечение выпускать; как Proctor&Gamble, – какие потребительские товары производить. Рассмотрим более подробно такую оптимизационную задачу.

***Пример 1.5.*** Большинство корпораций предпочитает реализовывать проекты, которые при условии ограниченных ресурсов (обычно это капитал и рабочая сила) имеют наибольшую чистую приведенную стоимость (ЧПС). Скажем, компания – разработчик программного обеспечения пытается определить, какие из 20 проектов ей следует осуществить. ЧПС (в млн долл.) каждого проекта, а также затраты (в млн долл.) и количество программистов, необходимое в течение следующих трех лет, представлены в таблице.

| Проекты | ЧПС | Затраты для реализации проекта (млн долл.) | | | Количество программистов для реализации проекта (чел.) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1-й год | 2-й год | 3-й год | 1-й год | 2-й год | 3-й год |
| 1 | 928 | 398 | 180 | 368 | 111 | 108 | 123 |
| 2 | 908 | 151 | 269 | 248 | 139 | 86 | 83 |
| 3 | 801 | 129 | 189 | 308 | 56 | 61 | 23 |
| 4 | 543 | 275 | 218 | 220 | 54 | 70 | 59 |
| 5 | 944 | 291 | 252 | 228 | 123 | 141 | 70 |
| 6 | 848 | 80 | 283 | 285 | 119 | 84 | 37 |
| 7 | 545 | 203 | 220 | 77 | 54 | 44 | 42 |
| 8 | 808 | 150 | 113 | 143 | 67 | 101 | 43 |
| 9 | 638 | 282 | 141 | 160 | 37 | 55 | 64 |
| 10 | 841 | 214 | 254 | 355 | 130 | 72 | 62 |
| 11 | 664 | 224 | 271 | 130 | 51 | 79 | 58 |
| 12 | 546 | 225 | 150 | 33 | 35 | 107 | 63 |
| 13 | 699 | 101 | 218 | 272 | 43 | 90 | 71 |
| 14 | 599 | 255 | 202 | 70 | 3 | 75 | 83 |
| 15 | 903 | 228 | 351 | 240 | 60 | 93 | 80 |
| 16 | 859 | 303 | 173 | 431 | 60 | 90 | 41 |
| 17 | 748 | 133 | 427 | 220 | 59 | 40 | 39 |
| 18 | 668 | 197 | 98 | 214 | 95 | 96 | 74 |
| 19 | 888 | 313 | 278 | 291 | 66 | 75 | 74 |
| 20 | 655 | 152 | 211 | 134 | 85 | 59 | 70 |

Например, проект 2 принесет в результате 908 млн долл. Для его реализации требуется вложить 151 млн долл. в первый год, 269 млн долл. во второй год и 348 млн долл. в третий год. Для работы над проектом 2 необходимо задействовать 139 программистов в первый год, 86 программистов во второй год и 83 программиста в третий год. В таблице указаны денежные средства, доступные в течение каждого года из следующих трех лет, и показано количество доступных программистов.

| Доступные ресурсы | 1-й год | 2-й год | 3-й год |
|---|---|---|---|
| Финансовые средства (млн долл.) | 2 500 | 2 800 | 2 900 |
| Программисты (чел.) | 900 | 900 | 900 |

Например, в первый год доступно не более 2 500 млн долл. и 900 программистов.

Для каждого проекта компания должна решить, имеет ли смысл его реализовывать. Предположим, что компания не может реализовать часть программного проекта. Например, при выделении половины необходимых ресурсов компания получает неработающую программу, которая принесет 0 долл. дохода.

Прием, применяемый в ситуациях моделирования, в которых необходимо либо что-то делать, либо чего-то не делать, состоит в использовании *бинарных изменяемых ячеек*. Значение в бинарной изменяемой ячейке всегда только 0 или 1. Если значение в соответствующей проекту бинарной изменяемой ячейке равно 1, проект принимается. Если значение в такой ячейке равно 0, проект отклоняется.

Перейдем к решению задачи отбора проектов. Как и в любой модели поиска решения, нужно начать с определения целевой ячейки, изменяемых ячеек и ограничений:

– **целевая ячейка –** максимальная ЧПС выбранных проектов;

– **изменяемые ячейки –** подбор значения 0 или 1 в изменяемых ячейках, соответствующих каждому проекту;

– **ограничения –** для каждого года используемые денежные средства должны быть меньше или равны доступным средствам, а количество задействованных программистов не должно превышать количество доступных программистов.

Для построения компьютерной модели задачи внесем всю известную информацию о проектах в MS Excel (рис. 1.29).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Проекты* | *Оптимальный выбор* | *ЧПС* | *Затраты для реализации проекта* | | | *Количество программистов для реализации проекта* | | |
| 2 | | | | *1 год* | *2 год* | *3 год* | *1 год* | *2 год* | *3 год* |
| 3 | *Проект 1* | 1 | 928 | 398 | 180 | 368 | 111 | 108 | 123 |
| 4 | *Проект 2* | 1 | 908 | 151 | 269 | 248 | 139 | 86 | 83 |
| 5 | *Проект 3* | 1 | 801 | 129 | 189 | 308 | 56 | 61 | 23 |
| 6 | *Проект 4* | 1 | 543 | 275 | 218 | 220 | 54 | 70 | 59 |
| 7 | *Проект 5* | 1 | 944 | 291 | 252 | 228 | 123 | 141 | 70 |
| 8 | *Проект 6* | 1 | 848 | 80 | 283 | 285 | 119 | 84 | 37 |
| 9 | *Проект 7* | 1 | 545 | 203 | 220 | 77 | 54 | 44 | 42 |
| 10 | *Проект 8* | 1 | 808 | 150 | 113 | 143 | 67 | 101 | 43 |
| 11 | *Проект 9* | 1 | 638 | 282 | 141 | 160 | 37 | 55 | 64 |
| 12 | *Проект 10* | 1 | 841 | 214 | 254 | 355 | 130 | 72 | 62 |
| 13 | *Проект 11* | 1 | 664 | 224 | 271 | 130 | 51 | 79 | 58 |
| 14 | *Проект 12* | 1 | 546 | 225 | 150 | 33 | 35 | 107 | 63 |
| 15 | *Проект 13* | 1 | 699 | 101 | 218 | 272 | 43 | 90 | 71 |
| 16 | *Проект 14* | 1 | 599 | 255 | 202 | 70 | 3 | 75 | 83 |
| 17 | *Проект 15* | 1 | 903 | 228 | 351 | 240 | 60 | 93 | 80 |
| 18 | *Проект 16* | 1 | 859 | 303 | 173 | 431 | 60 | 90 | 41 |
| 19 | *Проект 17* | 1 | 748 | 133 | 427 | 220 | 59 | 40 | 39 |
| 20 | *Проект 18* | 1 | 668 | 197 | 98 | 214 | 95 | 96 | 74 |
| 21 | *Проект 19* | 1 | 888 | 313 | 278 | 291 | 66 | 75 | 74 |
| 22 | *Проект 20* | 1 | 655 | 152 | 211 | 134 | 85 | 59 | 70 |

Рис. 1.29. Исходная информация задачи

Изменяемые ячейки B3:B22, соответствующие каждому проекту, заполним единицами. Сформируем целевую ячейку B24, подсчитав в ней суммарную ЧПС выбранных проектов =СУММПРОИЗВ(B3:B22;C3:C22). В ячейки C27:C29 и C30:C32 запишем необходимые финансовые средства и востребованное количество программистов для реализации выбранных проектов (рис. 1.30), воспользовавшись формулами.

| Ресурсы | Время реализации проекта | Необходимые ресурсы |
|---|---|---|
| Финансовые средства | 1 год | =СУММПРОИЗВ(B3:B22;D3:D22) |
| | 2 год | =СУММПРОИЗВ(B3:B22;E3:E22) |
| | 3 год | =СУММПРОИЗВ(B3:B22;F3:F22) |
| Программисты | 1 год | =СУММПРОИЗВ(B3:B22;G3:G22) |
| | 2 год | =СУММПРОИЗВ(B3:B22;H3:H22) |
| | 3 год | =СУММПРОИЗВ(B3:B22;I3:I22) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | | | | |
| 24 | *ЧПС выбранных проектов* | 15033 | | |
| 25 | | | | |
| 26 | *Ресурсы* | *Время реализации проекта* | *Необходимые ресурсы* | *Доступные ресурсы* |
| 27 | *Финансовые средства* | *1 год* | 4304 | 2500 |
| 28 | | *2 год* | 4498 | 2800 |
| 29 | | *3 год* | 4427 | 2900 |
| 30 | *Программисты* | *1 год* | 1447 | 900 |
| 31 | | *2 год* | 1626 | 900 |
| 32 | | *3 год* | 1259 | 900 |
| 33 | | | | |

Рис. 1.30. Информация для формирования целевой ячейки и ограничений

Построенная задача является линейной, поскольку значение в целевой ячейке рассчитывается путем суммирования членов в виде (*изменяемая ячейка*) × (*константа*). Ежегодные затраты и необходимое количество программистов вычисляется аналогичным образом.

Перейдем к заполнению диалогового окна **Параметры поиска решения**. Диапазон бинарных изменяемых ячеек при поиске решения можно задать, добавив ограничение – указав в диалоговом окне **Добавления ограничения** ссылку на требуемые изменяемые ячейки и выбрав из списка **бин** (рис. 1.31).

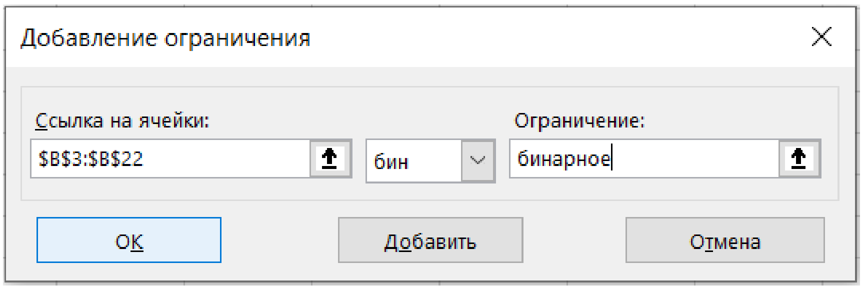



Рис. 1.31. Построение ограничения, гарантирующего бинарное решение задачи

Таким образом, приходим к следующей компьютерной модели задачи выбора эффективных проектов (рис. 1.32).

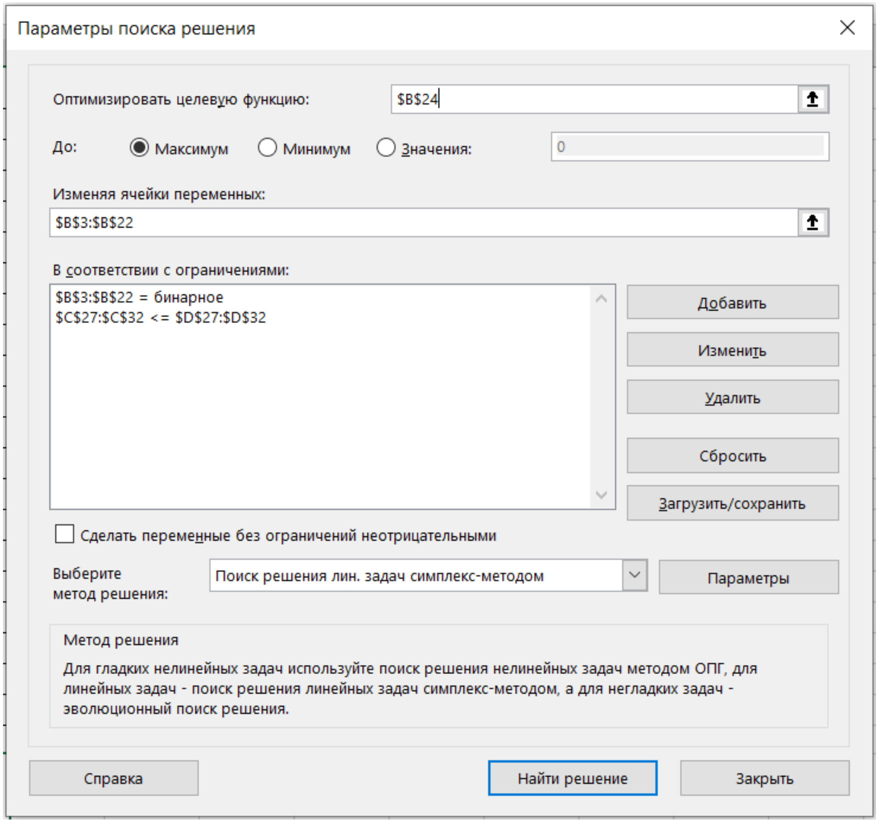



Рис. 1.32. Заполненное диалоговое окно **Параметры поиска решения**

Цель состоит в получении максимальной ЧПС выбранных проектов (ячейка B24). Изменяемые ячейки (диапазон от B3 до B22) являются бинарными ячейками для каждого проекта. Ограничения C27:C32<=D27:D32 гарантируют, что каждый год затраты и рабочая сила не превысят допустимых значений. После заполнения диалогового окна **Параметры поиска решения** нажимаем **Найти решение** и получаем следующие результаты (рис. 1.33).

| Проекты | Оптимальный выбор | ЧПС | Затраты для реализации проекта | | | Количество программистов для реализации проекта | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 год | 2 год | 3 год | 1 год | 2 год | 3 год |
| Проект 1 | 0 | 928 | 398 | 180 | 368 | 111 | 108 | 123 |
| Проект 2 | 1 | 908 | 151 | 269 | 248 | 139 | 86 | 83 |
| Проект 3 | 1 | 801 | 129 | 189 | 308 | 56 | 61 | 23 |
| Проект 4 | 0 | 543 | 275 | 218 | 220 | 54 | 70 | 59 |
| Проект 5 | 0 | 944 | 291 | 252 | 228 | 123 | 141 | 70 |
| Проект 6 | 1 | 848 | 80 | 283 | 285 | 119 | 84 | 37 |
| Проект 7 | 1 | 545 | 203 | 220 | 77 | 54 | 44 | 42 |
| Проект 8 | 1 | 808 | 150 | 113 | 143 | 67 | 101 | 43 |
| Проект 9 | 1 | 638 | 282 | 141 | 160 | 37 | 55 | 64 |
| Проект 10 | 1 | 841 | 214 | 254 | 355 | 130 | 72 | 62 |
| Проект 11 | 0 | 664 | 224 | 271 | 130 | 51 | 79 | 58 |
| Проект 12 | 0 | 546 | 225 | 150 | 33 | 35 | 107 | 63 |
| Проект 13 | 0 | 699 | 101 | 218 | 272 | 43 | 90 | 71 |
| Проект 14 | 1 | 599 | 255 | 202 | 70 | 3 | 75 | 83 |
| Проект 15 | 1 | 903 | 228 | 351 | 240 | 60 | 93 | 80 |
| Проект 16 | 1 | 859 | 303 | 173 | 431 | 60 | 90 | 41 |
| Проект 17 | 0 | 748 | 133 | 427 | 220 | 59 | 40 | 39 |
| Проект 18 | 0 | 668 | 197 | 98 | 214 | 95 | 96 | 74 |
| Проект 19 | 1 | 888 | 313 | 278 | 291 | 66 | 75 | 74 |
| Проект 20 | 1 | 655 | 152 | 211 | 134 | 85 | 59 | 70 |

| | |
|---|---|
| ЧПС выбранных проектов | 9293 |

| Ресурсы | Время реализации проекта | Необходимые ресурсы | Доступные ресурсы |
|---|---|---|---|
| Финансовые средства | 1 год | 2460 | 2500 |
| | 2 год | 2684 | 2800 |
| | 3 год | 2742 | 2900 |
| Программисты | 1 год | 876 | 900 |
| | 2 год | 895 | 900 |
| | 3 год | 702 | 900 |

Рис. 1.33. Оптимальное решение задачи

Компания может получить максимальную чистую приведенную стоимость в размере 9 293 млн долл., выбрав для реализации проекты 2, 3, 6–10, 14–16, 19 и 20.

Иногда модели отбора проектов включают и другие ограничения. Например, предположим, что если вы выбрали проект 3, то должны выбрать и проект 4. Поскольку текущее оптимальное решение не включает проект 4, то для новой задачи оно будет не оптимальным. Для решения новой задачи просто добавьте следующее ограничение: значение в бинарной изменяемой ячейке для проекта 3 меньше или равно значению в бинарной изменяемой ячейке для проекта 4.

Ячейка B5 ссылается на бинарное значение, связанное с проектом 3, а ячейка B6 – на бинарное значение, связанное с проектом 4. После добавления ограничения B5<=B6 при выборе проекта 3 значение в ячейке B5 равно 1, и это ограничение принудительно устанавливает значение 1 в ячейке B6 (выбор проекта 4). Это ограничение не оказывает влияние на бинарное в изменяемой ячейке, соответствующей проекту 4, если проект 3 не выбран. Если проект 3 не выбран, значение в B5 равно 0 и бинарное значение для проекта 4 может быть равно 0 или 1, что нам и нужно. На рис. 1.34 показано новое оптимальное решение.

| Проекты | Оптимальный выбор | ЧПС | Затраты для реализации проекта | | | Количество программистов для реализации проекта | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 год | 2 год | 3 год | 1 год | 2 год | 3 год |
| Проект 1 | 0 | 928 | 398 | 180 | 368 | 111 | 108 | 123 |
| Проект 2 | 1 | 908 | 151 | 269 | 248 | 139 | 86 | 83 |
| Проект 3 | 1 | 801 | 129 | 189 | 308 | 56 | 61 | 23 |
| Проект 4 | 1 | 543 | 275 | 218 | 220 | 54 | 70 | 59 |
| Проект 5 | 0 | 944 | 291 | 252 | 228 | 123 | 141 | 70 |
| Проект 6 | 1 | 848 | 80 | 283 | 285 | 119 | 84 | 37 |
| Проект 7 | 1 | 545 | 203 | 220 | 77 | 54 | 44 | 42 |
| Проект 8 | 1 | 808 | 150 | 113 | 143 | 67 | 101 | 43 |
| Проект 9 | 1 | 638 | 282 | 141 | 160 | 37 | 55 | 64 |
| Проект 10 | 0 | 841 | 214 | 254 | 355 | 130 | 72 | 62 |
| Проект 11 | 0 | 664 | 224 | 271 | 130 | 51 | 79 | 58 |
| Проект 12 | 0 | 546 | 225 | 150 | 33 | 35 | 107 | 63 |
| Проект 13 | 0 | 699 | 101 | 218 | 272 | 43 | 90 | 71 |
| Проект 14 | 0 | 599 | 255 | 202 | 70 | 3 | 75 | 83 |
| Проект 15 | 1 | 903 | 228 | 351 | 240 | 60 | 93 | 80 |
| Проект 16 | 1 | 859 | 303 | 173 | 431 | 60 | 90 | 41 |
| Проект 17 | 1 | 748 | 133 | 427 | 220 | 59 | 40 | 39 |
| Проект 18 | 1 | 668 | 197 | 98 | 214 | 95 | 96 | 74 |
| Проект 19 | 1 | 888 | 313 | 278 | 291 | 66 | 75 | 74 |
| Проект 20 | 0 | 655 | 152 | 211 | 134 | 85 | 59 | 70 |

| | |
|---|---|
| ЧПС выбранных проектов | 9157 |

| Ресурсы | Время реализации проекта | Необходимые ресурсы | Доступные ресурсы |
|---|---|---|---|
| Финансовые средства | 1 год | 2444 | 2500 |
| | 2 год | 2760 | 2800 |
| | 3 год | 2837 | 2900 |
| Программисты | 1 год | 866 | 900 |
| | 2 год | 895 | 900 |
| | 3 год | 659 | 900 |

Рис. 1.34. Оптимальное решение задачи

Теперь предположим, что можно осуществить только четыре проекта из первых десяти предложенных проектов. В ячейке G24 по формуле =СУММ(B3:B12) вычислим сумму бинарных значений, связанных с проектами 1–10. Добавив ограничение G24<=4, гарантируем выбор не более четырех проектов.

| Проекты | Оптимальный выбор | ЧПС | Затраты для реализации проекта | | | Количество программистов для реализации проекта | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 год | 2 год | 3 год | 1 год | 2 год | 3 год |
| Проект 1 | 0 | 928 | 398 | 180 | 368 | 111 | 108 | 123 |
| Проект 2 | 0 | 908 | 151 | 269 | 248 | 139 | 86 | 83 |
| Проект 3 | 1 | 801 | 129 | 189 | 308 | 56 | 61 | 23 |
| Проект 4 | 0 | 543 | 275 | 218 | 220 | 54 | 70 | 59 |
| Проект 5 | 0 | 944 | 291 | 252 | 228 | 123 | 141 | 70 |
| Проект 6 | 0 | 848 | 80 | 283 | 285 | 119 | 84 | 37 |
| Проект 7 | 1 | 545 | 203 | 220 | 77 | 54 | 44 | 42 |
| Проект 8 | 1 | 808 | 150 | 113 | 143 | 67 | 101 | 43 |
| Проект 9 | 0 | 638 | 282 | 141 | 160 | 37 | 55 | 64 |
| Проект 10 | 1 | 841 | 214 | 254 | 355 | 130 | 72 | 62 |
| Проект 11 | 0 | 664 | 224 | 271 | 130 | 51 | 79 | 58 |
| Проект 12 | 0 | 546 | 225 | 150 | 33 | 35 | 107 | 63 |
| Проект 13 | 1 | 699 | 101 | 218 | 272 | 43 | 90 | 71 |
| Проект 14 | 1 | 599 | 255 | 202 | 70 | 3 | 75 | 83 |
| Проект 15 | 1 | 903 | 228 | 351 | 240 | 60 | 93 | 80 |
| Проект 16 | 1 | 859 | 303 | 173 | 431 | 60 | 90 | 41 |
| Проект 17 | 1 | 748 | 133 | 427 | 220 | 59 | 40 | 39 |
| Проект 18 | 1 | 668 | 197 | 98 | 214 | 95 | 96 | 74 |
| Проект 19 | 1 | 888 | 313 | 278 | 291 | 66 | 75 | 74 |
| Проект 20 | 1 | 655 | 152 | 211 | 134 | 85 | 59 | 70 |

| ЧПС выбранных проектов | 9014 | | | | Количество выбранных проектов | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|

| Ресурсы | Время реализации проекта | Необходимые ресурсы | Доступные ресурсы |
|---|---|---|---|
| Финансовые средства | 1 год | 2378 | 2500 |
| | 2 год | 2734 | 2800 |
| | 3 год | 2755 | 2900 |
| Программисты | 1 год | 778 | 900 |
| | 2 год | 896 | 900 |
| | 3 год | 702 | 900 |

Рис. 1.35. Оптимальное решение задачи

Новое оптимальное решение представлено на рис. 1.35: ЧПС упала до 9 014 млн долл.

## 1.5. Модель планирование производства, учитывающая выпуск бракованной продукции и эффект масштаба производства

Технология применения *MS Excel* к решению оптимизационных задач нелинейного программирования для выпуклых (вогнутых) и квадратичных нелинейных моделей мало чем отличается от технологии, применяемой при решении задач линейного программирования, за исключением некоторых особенностей.

Для нелинейных моделей общего вида, которые могут иметь множество локальных экстремумов с неизвестным априори количеством, эффективные методы на сегодняшний день отсутствуют. В этом случае необходимо многократно проводить компьютерное моделирование задачи и выявлять как можно больше локальных экстремумов, чтобы затем сравнить их между собой и отобрать из них глобальный экстремум. Практически это выливается в многократное решение задачи нелинейного программирования с различными начальными значениями переменных математической модели.

Компьютерное моделирование нелинейных моделей реализуется с помощью надстройки **Поиск решения** MS Excel. Если для компьютерного решения линейных моделей надстройка **Поиск решения** MS Excel использует симплекс-метод, то для решения нелинейных моделей – обобщенный метод приведенного градиента (ОПГ). Методику решения задач выпуклого программирования с линейными ограничениями методом приведенного градиента впервые предложил Вульф в 1963 г. Данный метод получил название метод Франка – Вульфа, или метод приведенного градиента, он основан на сокращении размерности задачи с помощью представления всех переменных через множество независимых переменных. В дальнейшем данный метод распространили на решение задач нелинейного программирования с заданными нелинейными ограничениями. Этот метод позволяет находить решение систем линейных или нелинейных уравнений, если целевая функция не задана, или определять экстремумы функций, если ограничений нет, т.е. решать задачу безусловной оптимизации.

Методику компьютерного моделирования задач нелинейного программирования рассмотрим на примере задачи планирования производства, учитывающего выпуск бракованной продукции и эффект масштаба производства.

Любое производство наряду с выпуском годной продукции сопровождается также выпуском дефектной или бракованной продукции, или попросту брака. Как и на производство годной продукции, на выпуск брака также затрачиваются ресурсы, но затрачиваются впустую. Поскольку объемы ресурсов ограниченны, то дополнительные их затраты на выпуск бракованной продукции приводят к большим затратам ресурсов и, как следствие, к уменьшению объема выпуска годной продукции. А это, в свою очередь, ведет к росту себестоимости выпускаемой продукции и уменьшению выручки и прибыли от ее реализации.

Другим фактором, оказывающим существенное влияние на оптимальный план производства, является так называемый эффект масштаба производства, или просто эффект масштаба. Эффект масштаба производства заключается в том, что с ростом объема выпуска себестоимость продукции уменьшается, а доход и прибыль от ее реализации увеличиваются. Эффект масштаба обусловливается множеством причин, среди которых можно назвать выход технологии на стабильный уровень, ритмичность и многократную повторяемость однородных и недорогих операций, полную загрузку оборудования, инновации и т.д.

Попытка адекватного моделирования производства продукции, учитывающего выпуск брака и эффект масштаба, неизбежно приводит к построению нелинейной оптимизационной математической модели.

Построим математическую модель оптимального планирования производства с максимизацией прибыли, которая учитывает выпуск бракованной продукции и эффект масштаба производства для случая выпуска двух видов продукции $P_1$ и $P_2$, на производство которых расходуется три вида ресурсов $R_1$, $R_2$ и $R_3$. Введем следующие обозначения:

– $x_1$ и $x_2$ (усл. ед.) – объемы выпуска годной продукции $P_1$ и $P_2$ (переменные математической модели) (усл. ед. может означать, например, килограммы, тонны, метры, штуки и т.д.);

– $a_{ij}$ – затраты ресурса $R_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$, используемого на производство 1 усл. ед. продукции $P_j$ $(j = 1,\ 2)$;

– $b_1,\ b_2$ и $b_3$ (усл. ед.) – объем ресурсов, имеющихся в наличии;

– $c_1$ и $c_2$ (ден. ед./усл. ед.) – ожидаемая прибыль от реализации 1 усл. ед. продукции $P_1$ и $P_2$.

Сначала рассмотрим линейную математическую модель планирования производства без учета выпуска бракованной продукции и эффекта масштаба, а затем построим нелинейную модель, учитывающую воздействие двух факторов – выпуска бракованной продукции и эффекта масштаба.

Рассмотрим задачу, заключающуюся в производстве двух видов продукции, при производстве которой используют три вида ресурсов с ограниченными объемами и которая затем поступает на реализацию, причем оценки ожидаемых значений прибыли на единицу каждого вида продукции известны.

Чтобы составить математическую модель задачи, ее необходимо структурировать, т.е. вычленить цель, критерий, ограничения, управляемые и неуправляемые факторы.

Целью (и критерием) рассматриваемой задачи является получение максимальной суммарной прибыли от реализации произведенной продукции. Неуправляемые факторы – заданные и неизменные в данной задаче нормы расхода ресурсов, предельные количества ресурсов и величины прибыли от реализации единицы всех видов продукции. Совокупность всех неуправляемых факторов определяет ограничения математической модели. Управляемые факторы (переменные модели) представляют собой объемы выпускаемой продукции, а совокупность управляемых факторов удовлетворяет всем ограничениям – возможным решениям или допустимым планам производства (альтернативам). Таким образом, оптимизационная математическая модель задачи должна содержать целевую функцию и систему ограничений, связывающих между собой управляемые и неуправляемые факторы.

Целевая функция представляет собой суммарную прибыль от реализации произведенной продукции. Прибыль от реализации единицы продукции $P_j$ равна $c_j$, а прибыль от реализации этой продукции, произведенной в объеме $x_j$, будет равна произведению $c_j x_j$. Прибыль от реализации всей произведенной продукции будет равна сумме отдельных прибылей

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

и ее необходимо максимизировать.

Ограничения отражают тот факт, что расход каждого вида ресурса, затрачиваемого на производство всех видов продукции, не может превышать его объема, имеющегося у предприятия на складе.

Составим ограничение на расход ресурса $R_i$. Количество ресурса $R_i$, расходуемого на производство единицы продукции $P_j$, равно величине $a_{ij}$, тогда расход этого же ресурса, затрачиваемого на производство продукции $P_j$ в объеме $x_j$, равно произведению $a_{ij}x_j$. Поскольку ресурс $R_i$ затрачивается на производство не только продукции $P_j$, но и на производство всех остальных видов продукции, то суммарный расход ресурса $R_i$ равен сумме расходов этого ресурса по всем видам продукции, то есть

$$\{Суммарный\ расход\ ресурса\ R_i\} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2,$$

а весь израсходованный ресурс, которым располагает предприятие, не должен превосходить его предельной величины $b_i$ , то есть

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i.$$

Аналогичные неравенства могут быть записаны для каждого из ресурсов $R_1$, $R_2$ и $R_3$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3.$$

И наконец, поскольку объемы выпуска всех видов продукции $x_1$ и $x_2$ не могут быть отрицательными, необходимо добавить условия

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0.$$

Таким образом, математическая модель задачи планирования производства или оптимального использования ресурсов имеет вид

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to max,$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3,$$
$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0.$$

Полученная оптимизационная математическая модель описывает задачу по выпуску продукции в объемах, которые при реализации на рынке дадут предприятию максимальную прибыль (доход, выручку) без учета выпуска брака и эффекта масштаба производства. В этой модели предполагается, что вся произведенная в объемах $x_1$ и $x_2$ продукция $P_1$ и $P_2$ является годной и полностью реализуемой.

Моделирование производственного плана с учетом выпуска бракованной продукции и эффекта масштаба производства затрагивает разные составляющие математической модели: и систему ограничений, и целевую функцию. Основным фактором, сопровождающим выпуск бракованной продукции, является повышенное расходование ресурсов, поэтому моделирование брака должно отразиться в первую очередь на системе ограничений, выражающих объемы ресурсов, затрачиваемых в производстве. В свою очередь, эффект масштаба проявляется в уменьшении себестоимости продукции с ростом объемов выпуска и, следовательно, в увеличении прибыли от реализации продукции. Так как общая прибыль описывается целевой функцией, то эффект масштаба затронет именно ее.

*Учет выпуска бракованной продукции.* На выпуск бракованной продукции затрачиваются те же ресурсы, что и на производство годной продукции. Учитывая ограниченность ресурсов и то, что некоторая их часть идет на выпуск брака, объемы ресурсов, непосредственно расходуемых на производство годной продукции, сокращаются, что приводит к уменьшению объемов выпуска годной продукции. Поэтому полный расход ресурса $R_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$ можно записать в виде

$$\{\textit{Объем расходуемого ресурса } R_i\} =$$
$$= \{\textit{Объем ресурса } R_i\textit{, расходуемого на выпуск годной продукции}\} +$$
$$+ \{\textit{Объем ресурса } R_i\textit{, расходуемого на выпуск бракованной продукции}\}.$$

Причины возникновения брака многочисленны и разнообразны, зависят от технологии производства и носят случайный характер. Для построения математической модели, учитывающей выпуск бракованной продукции, примем следующее допущение: с ростом объема производства продукции объем выпускаемого брака также увеличивается. Тогда объем ресурса $R_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$, расходуемого на производство годной продукции $P_j,\ j = 1,\ 2$ в объеме $x_j$, а также брака, складывается из двух частей, одна из которых объемом $a_{ij}x_j$ идет на производство только годной продукции, а другая – объемом $k_{ij}x_j^2$ – расходуется на производство бракованной продукции. Коэффициент $k_{ij}$ характеризует интенсивность изменения расхода ресурса $R_i$ при выпуске одной условной единицы брака продукции $P_j$. Отсюда следует, что суммарный расход ресурса $R_i$ затрачиваемого одновременно и на выпуск годной продукции вида $P_j$, и на выпуск бракованной продукции, равен сумме $a_{ij}x_j + k_{ij}x_j^2$.

Поскольку ресурс вида $R_i$ затрачивается как на производство продукции $P_1$, так и на производство продукции $P_2$, то полный объем затраченного ресурса $R_i$ составит величину $a_{i1}x_1 + k_{i1}x_1^2 + a_{i2}x_2 + k_{i2}x_2^2$. Учитывая, что объемы используемых ресурсов $R_1,\ \ R_2$ и $R_3$ ограничены величинами $b_1,\ \ b_2$ и $b_3$, запишем систему ограничений математической модели, которая наряду с выпуском годной продукции учитывает также и выпуск брака:

$$a_{11}x_1 + k_{11}x_1^2 + a_{12}x_2 + k_{12}x_2^2 \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + k_{21}x_1^2 + a_{22}x_2 + k_{22}x_2^2 \le b_2,$$
$$a_{31}x_1 + k_{31}x_1^2 + a_{32}x_2 + k_{32}x_2^2 \le b_3.$$

Напомним, что переменные модели $x_1$ и $x_2$ означают объемы производства годной продукции вида $P_1$ и $P_2$.

*Учет эффекта масштаба производства.* Благодаря эффекту масштаба прибыль от реализации одной условной единицы продукции растет с увеличением объема производимой продукции. Построим математическую модель, учитывающую фактор масштаба производства.

Общая прибыль от реализации одной условной единицы продукции вида $P_j,\ j = 1,\ 2$ складывается из двух компонент. Первая компонента равна $c_j$ и не учитывает эффект масштаба, а вторая – назовем ее «добавочная прибыль, обусловленная эффектом масштаба» – равна $l_jx_j$, где коэффициент $l_j$ выражает интенсивность изменения прибыли одной условной единицы продукции $P_j$ с ростом объема ее выпуска. Поскольку общая прибыль от реализации одной условной единицы продукции $P_j$, обусловленная эффектом масштаба, представляет собой нелинейную функцию

$$f(x) = (c_1 + l_1 x_1)x_1 + (c_2 + l_2 x_2)x_2$$

или, после раскрытия скобок, функцию

$$f(x) = c_1 x_1 + l_1 x_1^2 + c_2 x_2 + l_2 x_2^2.$$

*Математическая модель, учитывающая выпуск бракованной продукции и эффект масштаба производства:*

$$\begin{gathered} f(x) = c_1 x_1 + l_1 x_1^2 + c_2 x_2 + l_2 x_2^2 \to max, \\ a_{11} x_1 + k_{11} x_1^2 + a_{12} x_2 + k_{12} x_2^2 \le b_1, \\ a_{21} x_1 + k_{21} x_1^2 + a_{22} x_2 + k_{22} x_2^2 \le b_2, \\ a_{31} x_1 + k_{31} x_1^2 + a_{32} x_2 + k_{32} x_2^2 \le b_3, \\ x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

Математическая модель является нелинейной оптимизационной математической моделью и относительно нее можно сделать следующие выводы:

– множество решений каждого из трех неравенств, входящих в систему ограничений, представляет собой область, ограниченную эллипсом, и является выпуклым множеством;

– пересечение трех множеств решений трех неравенств образует выпуклую область допустимых точек как пересечение выпуклых областей;

– линии уровня, соответствующие целевой функции, представляют собой эллипсы, которые концентрически расширяются вокруг неподвижного центра, при увеличении значений целевой функции $f(x)$.

Рассмотрим численный пример, иллюстрирующий влияние выпуска бракованной продукции и эффекта масштаба производства на оптимальный план производства.

***Пример 1.6.*** Предприятие выпускает два вида продукции $P_1$ и $P_2$ и использует при этом три вида ресурсов $R_1$, $R_2$ и $R_3$. Производство продукции, помимо выпуска годной продукции, сопровождается также выпуском некоторого количества брака. Кроме того, благодаря инновациям производителю удалось добиться эффекта масштаба производства, в результате чего с увеличением объемов выпускаемой продукции снижается ее себестоимость и растет прибыль.

В таблице приведены численные значения затрат ресурсов на производство одной условной единицы годной продукции и затраты ресурсов на производство одной условной единицы бракованной продукции.

| Ресурсы | Расход ресурсов на производство одной условной единицы годной и бракованной продукции, усл. ед. | | | | Ограничения на ресурсы, усл. ед. |
|---|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | | $P_2$ | | |
| | $a_{i1}$ | $k_{i1}$ | $a_{i2}$ | $k_{i2}$ | |
| $R_1$ | 3,5 | 0,003 6 | 5,7 | 0,005 3 | 3 250 |
| $R_2$ | 2,7 | 0,004 5 | 9,3 | 0,003 3 | 4 180 |
| $R_3$ | 3,2 | 0,002 7 | 2,8 | 0,006 3 | 2 600 |

Значение прибыли от реализации одной условной единицы продукции без учета и с учетом эффекта масштаба производства приведены в таблице

| Прибыль от реализации одной условной единицы продукции, учитывающая и не учитывающая эффект масштаба производства, ден. ед. | | | |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | | $P_2$ | |
| $c_1$ | $l_1$ | $c_2$ | $l_2$ |
| 110 | 0,08 | 135 | 0,015 |

Математическая модель, учитывающая выпуск брака и эффект производства, имеет вид:

$$f(x) = 110x_1 + 0{,}08x_1^2 + 135x_2 + 0{,}015x_2^2 \rightarrow max,$$
$$3{,}5x_1 + 0{,}0036x_1^2 + 5{,}7x_2 + 0{,}0053x_2^2 \leq 3250,$$
$$2{,}7x_1 + 0{,}0045x_1^2 + 9{,}3x_2 + 0{,}0033x_2^2 \leq 4180,$$
$$3{,}2x_1 + 0{,}0027x_1^2 + 2{,}8x_2 + 0{,}0063x_2^2 \leq 2600,$$
$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

Создадим компьютерную модель в среде *MS Excel*. Для этого внесем все исходные данные, сформировав две таблицы, как показано на рис. 1.36.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Продукция* | $P_1$ | $P_2$ | *Суммарная прибыль* | | | | |
| 2 | *Оптимальный план* | 1 | 1 | | | | | |
| 3 | *Прибыль от реализации одной усл.ед. продукции не учитывающая эффект масштаба производства* | 110 | 135 | | | | | |
| 4 | *Прибыль от реализации одной усл.ед. продукции учитывающая эффект масштаба производства* | 0,08 | 0,015 | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | *Ресурсы* | *Расход ресурсов на производство одной усл.ед. годной продукции* | | *Расход ресурсов на производство одной усл.ед. бракованной продукции* | | *Суммарный расход* | *Запас* | |
| 8 | | $P_1$ | $P_2$ | $P_1$ | $P_2$ | | | |
| 9 | $R_1$ | 3,5 | 5,7 | 0,0036 | 0,0053 | | 3250 | |
| 10 | $R_2$ | 2,7 | 9,3 | 0,0045 | 0,0033 | | 4180 | |
| 11 | $R_3$ | 3,2 | 2,8 | 0,0027 | 0,0063 | | 2600 | |
| 12 | | | | | | | | |

Рис. 1.36. Формирование исходных данных для компьютерной модели

В ячейки B2, C2 введем начальный план выпуска шоколада, здесь он задан единицами. В ячейки B3, C3 запишем прибыль от реализации одной условной единицы продукции без учета эффекта масштаба производства. В ячейки B4, C4 запишем соответственно прибыль от реализации одной условной единицы продукции с учетом эффекта масштаба производства. В ячейке D2 запишем формулу для вычисления значения целевой функции, а именно суммарной прибыли от реализации всей произведенной продукции. На основании построенной математической модели в ячейке D2 реализована формула

$$= B3 \cdot B2 + B4 \cdot B2\text{^}2 + C3 \cdot C2 + C4 \cdot C2\text{^}2.$$

Теперь аналогичным образом отразим во второй таблице в ячейках F9, F10, F11 суммарный расход ресурсов для производства продукции (рис. 1.37). Таким образом, получим следующие формулы:

– в ячейке F9 реализована функция

$$= B9 \cdot B2 + D9 \cdot B2\text{^}2 + C9 \cdot C2 + E9 \cdot C2\text{^}2;$$

– в ячейке F10 реализована функция

$$= B10 \cdot B2 + D10 \cdot B2\text{^}2 + C10 \cdot C2 + E10 \cdot C2\text{^}2;$$

– в ячейке F11 реализована функция

$$= B11 \cdot B2 + D11 \cdot B2\text{^}2 + C11 \cdot C2 + E11 \cdot C2\text{^}2.$$

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Продукция* | $P_1$ | $P_2$ | *Суммарная прибыль* | | | | |
| 2 | *Оптимальный план* | 1 | 1 | 245,095 | | | | |
| 3 | *Прибыль от реализации одной усл.ед. продукции не учитывающая эффект масштаба производства* | 110 | 135 | | | | | |
| 4 | *Прибыль от реализации одной усл.ед. продукции учитывающая эффект масштаба производства* | 0,08 | 0,015 | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | *Ресурсы* | *Расход ресурсов на производство одной усл.ед. годной продукции* | | *Расход ресурсов на производство одной усл.ед. бракованной продукции* | | *Суммарный расход* | *Запас* | |
| 8 | | $P_1$ | $P_2$ | $P_1$ | $P_2$ | | | |
| 9 | $R_1$ | 3,5 | 5,7 | 0,0036 | 0,0053 | 9,2089 | 3250 | |
| 10 | $R_2$ | 2,7 | 9,3 | 0,0045 | 0,0033 | 12,0078 | 4180 | |
| 11 | $R_3$ | 3,2 | 2,8 | 0,0027 | 0,0063 | 6,009 | 2600 | |
| 12 | | | | | | | | |

Рис. 1.37. Электронная модель задачи о планировании производства

Для поиска оптимального решения в меню выберем вкладку **Данные** и в этой вкладке активизируем надстройку **Поиск решения**, в результате на экране компьютера появится окно (рис. 1.38).

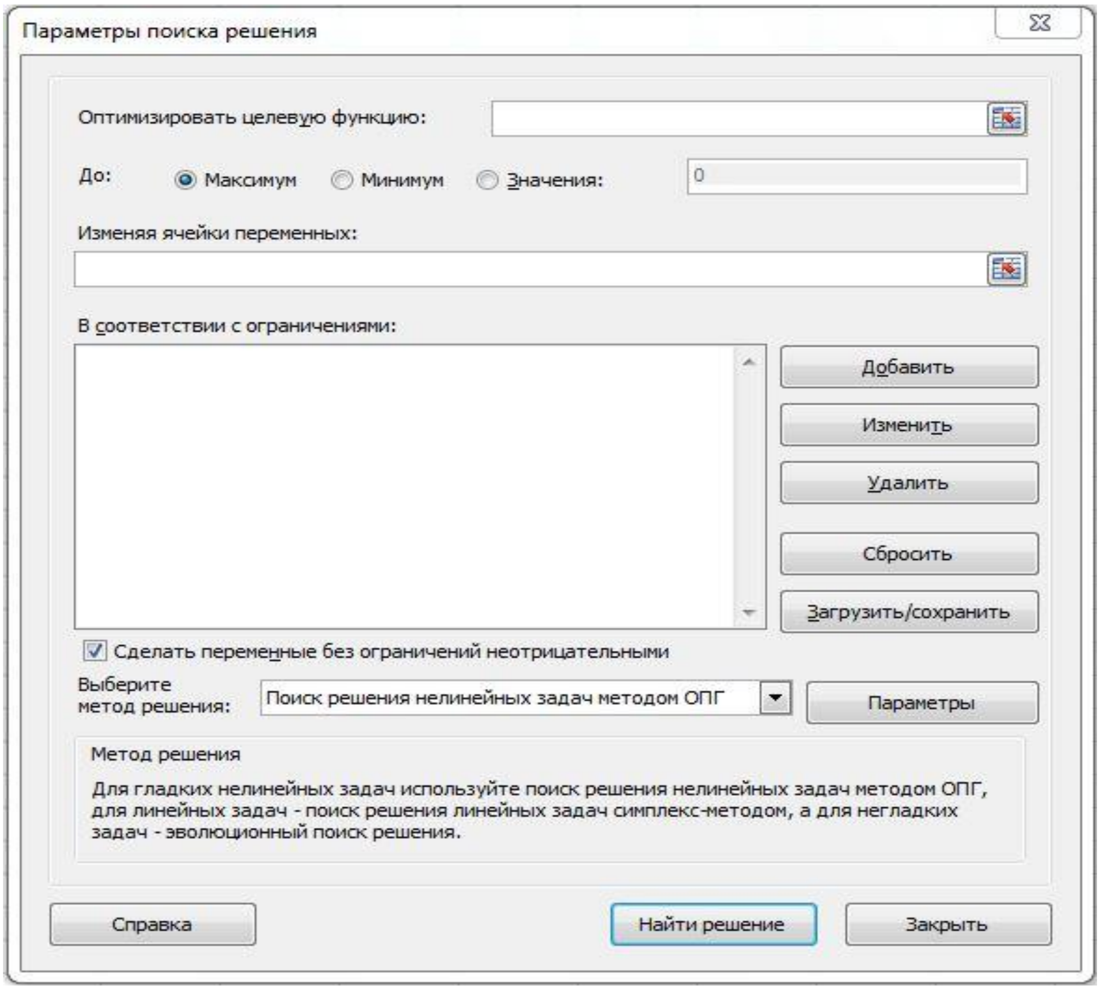



Рис. 1.38. Диалоговое окно **Параметры поиска решения**

Рассмотрим поподробнее процесс создания компьютерной модели задачи.

В поле *Оптимизировать целевую функцию* должен находиться адрес ячейки, содержащей формулу для вычисления значения целевой функции, для рассматриваемой задачи это функция суммарного дохода, ячейка D2. Содержимое этой ячейки можно максимизировать, минимизировать или для нее можно поставить целью достижение какого-либо постоянного значения. В рамках рассматриваемой задачи поиска максимальной прибыли выделяем значение *Максимум*.

Активизировав поле *Изменяя ячейки переменных*, с помощью курсора вводим ячейки B2:C2, в которых находятся значения переменных задачи, количество выпускаемой продукции. Значения этих ячеек будут изменяться в процессе поиска оптимального решения.

Следующим этапом необходимо задать для средства *Поиск решения* основные ограничения рассматриваемой задачи. Для этого активизируем поле *В соответствии с ограничениями*, нажав кнопку *Добавить*. Эта кнопка служит для отображения окна *Добавление ограничения* (рис. 1.39).

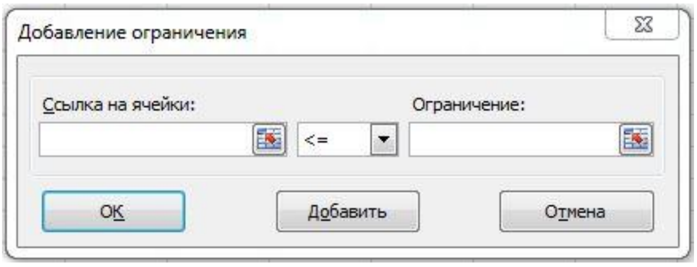



Рис. 1.39. Диалоговое окно *Добавление ограничения*

В поле *Ссылка на ячейки* следует ввести ячейку, в которой находится левая часть первого основного ограничения задачи, в нашем случае это ячейка F9 с формулой для вычисления расхода ресурса $R_1$. В следующем поле выберем знак ограничения «≤». В поле *Ограничение* следует ввести ячейку G9 со значением правой части первого ограничения – запас ресурса $R_1$ на предприятии. Далее, нажав на кнопку *Добавить,* аналогично можно записать ограничения, соответствующие ресурсам $R_2$ и $R_3$.

Можно поступить более рационально. Поскольку модель задачи организована так, что ресурсные ограничения одного знака расположены рядом, то их можно ввести все вместе, используя диапазоны ячеек: в поле *Ссылка на ячейки* вводятся ячейки F9: F11, в поле *Ограничение – ячейки* G9: G11 (рис. 1.40).

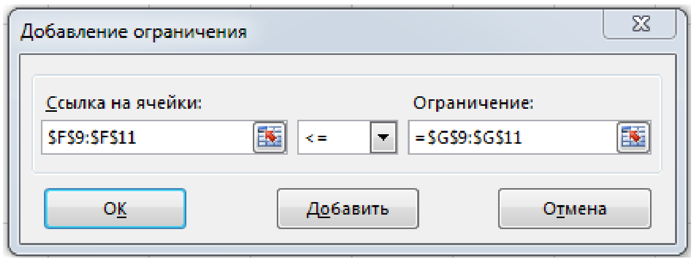



Рис. 1.40. Задание ограничений на ресурсы

После введения всех основных ограничений следует нажать кнопку *ОК*, чтобы вернуться в диалоговое окно *Поиска решений*.

Активизируем условие *Сделать переменные без ограничений неотрицательными* и выберем метод решения задачи. Для решения нелинейных задач программа предлагает воспользоваться методом ОПГ. Для выбора этого метода нужно воспользоваться опцией висячего меню. В результате заполнения всех полей и внесения всех ограничений в диалоговое окно **Поиск решений** электронная модель задачи примет вид как на рис. 1.41.

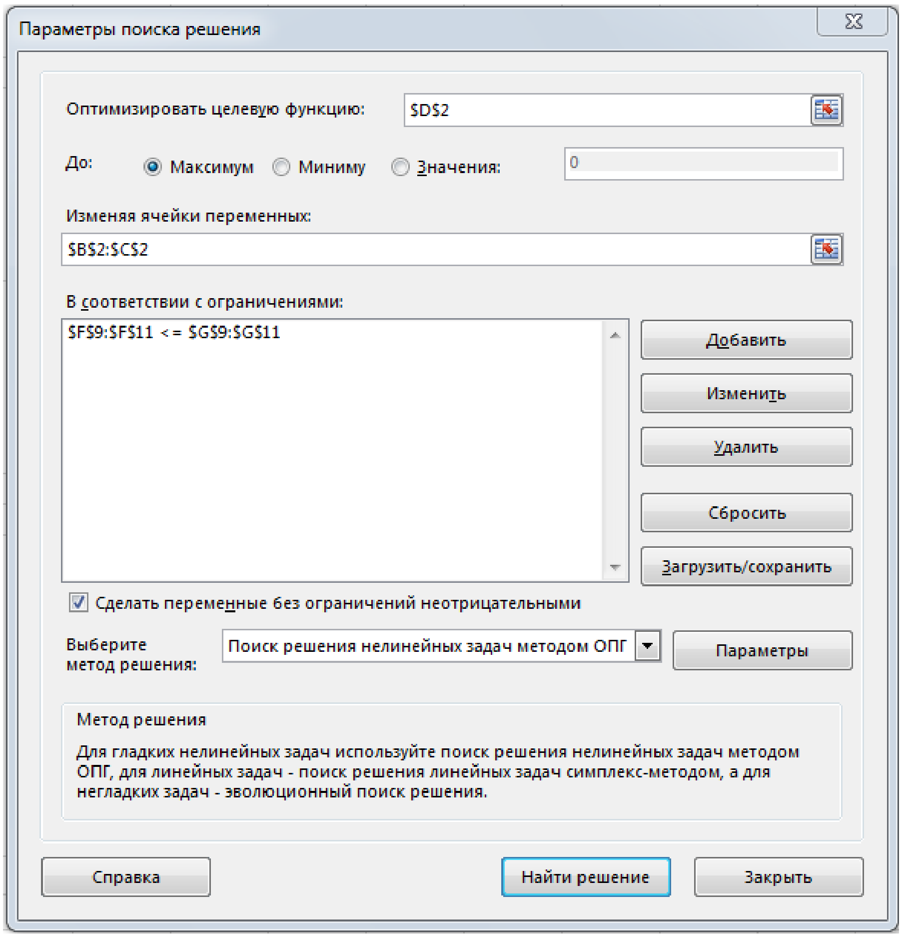



Рис. 1.41. Компьютерная модель задачи в надстройке **Поиск решения**

Нажмем клавишу *ОК*, чтобы вернуться в диалоговое окно надстройки **Поиск решения.**

Запустим вычислительный процесс поиска оптимального решения с помощью кнопки *Найти решение*. После нахождения оптимального производства шоколада на экране появится окно **Результаты поиска решения**, в котором предлагается выбрать тип отчета: результаты, устойчивость, пределы, а также элементы *Сохранить найденное решение* или *Восстановить исходные значения*. Выберем опцию *Сохранить найденное решение*.

Результаты поиска решения приведены на рис. 1.42.

Результаты численного решения этой нелинейной математической модели имеют вид $x_1^* = 497{,}44$, $x_2^* = 99{,}29$, $f(x^*) = 88\,065$.

Полученные оптимальные значения переменных модели и максимальное значение функции означают, что для достижения максимального значения суммарной прибыли ($f(x^*) = 88\,065$ ден. ед.) при наличии выпуска бракованной продукции и эффекта масштаба производства необходимо производить 497,44 усл. ед. продукции $P_1$ и 99,29 усл.ед. продукции $P_2$.

| Продукция | $P_1$ | $P_2$ | Суммарная прибыль |
|---|---|---|---|
| Оптимальный план | 497,4376338 | 99,28497833 | 88065,01035 |
| Прибыль от реализации одной усл.ед. продукции не учитывающая эффект масштаба производства | 110 | 135 | |
| Прибыль от реализации одной усл.ед. продукции учитывающая эффект масштаба производства | 0,08 | 0,015 | |

| Ресурсы | Расход ресурсов на производство одной усл.ед. годной продукции | | Расход ресурсов на производство одной усл.ед. бракованной продукции | | Суммарный расход | Запас |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | $P_1$ | $P_2$ | | |
| $R_1$ | 3,5 | 5,7 | 0,0036 | 0,0053 | 3250 | 3250 |
| $R_2$ | 2,7 | 9,3 | 0,0045 | 0,0033 | 3412,46058 | 4180 |
| $R_3$ | 3,2 | 2,8 | 0,0027 | 0,0063 | 2600 | 2600 |

Рис. 1.42. Результаты поиска решения в электронной модели задачи

Чтобы оценить влияние выпуска брака и эффекта масштаба производства, сравним оптимальные планы и максимальную прибыль для трех вариантов производства:

1. Выпуск брака и эффект масштаба отсутствуют. Операция моделируется линейной моделью

$$f(x) = 110x_1 + 135x_2 \to max,$$
$$3{,}5x_1 + 5{,}7x_2 \le 3250,$$
$$2{,}7x_1 + 9{,}3x_2 \le 4180,$$
$$3{,}2x_1 + 2{,}8x_2 \le 2600,$$
$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0.$$

2. Производство сопровождается выпуском брака и эффектом масштаба. Операция моделируется нелинейной моделью

$$f(x) = 110x_1 + 0{,}08x_1^2 + 135x_2 + 0{,}015x_2^2 \to max,$$
$$3{,}5x_1 + 0{,}0036x_1^2 + 5{,}7x_2 + 0{,}0053x_2^2 \le 3250,$$
$$2{,}7x_1 + 0{,}0045x_1^2 + 9{,}3x_2 + 0{,}0033x_2^2 \le 4180,$$
$$3{,}2x_1 + 0{,}0027x_1^2 + 2{,}8x_2 + 0{,}0063x_2^2 \le 2600,$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

3. Производство сопровождается выпуском брака, но эффект масштаба отсутствует. Такая операция моделируется нелинейной моделью

$$f(x) = 110x_1 + 135x_2 \to max,$$
$$3{,}5x_1 + 0{,}0036x_1^2 + 5{,}7x_2 + 0{,}0053x_2^2 \leq 3250,$$
$$2{,}7x_1 + 0{,}0045x_1^2 + 9{,}3x_2 + 0{,}0033x_2^2 \leq 4180,$$
$$3{,}2x_1 + 0{,}0027x_1^2 + 2{,}8x_2 + 0{,}0063x_2^2 \leq 2600,$$
$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

Используя **Поиск решения**, найдем решения всех построенных задач. Таким образом, решение линейной задачи, описывающей первый вариант производства, будет иметь вид как на рис. 1.43.

| *Продукция* | $P_1$ | $P_2$ | *Суммарная прибыль* |
|---|---|---|---|
| *Оптимальный план* | 677,7251185 | 154,028436 | 95343,6019 |
| *Прибыль от реализации одной усл.ед. продукции не учитывающая эффект масштаба производства* | 110 | 135 | |
| *Прибыль от реализации одной усл.ед. продукции учитывающая эффект масштаба производства* | 0,08 | 0,015 | |

| *Ресурсы* | *Расход ресурсов на производство одной усл.ед. годной продукции* | | *Расход ресурсов на производство одной усл.ед. бракованной продукции* | | *Суммарный расход* | *Запас* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | $P_1$ | $P_2$ | | |
| $R_1$ | 3,5 | 5,7 | 0,0036 | 0,0053 | 3250 | 3250 |
| $R_2$ | 2,7 | 9,3 | 0,0045 | 0,0033 | 3262,322275 | 4180 |
| $R_3$ | 3,2 | 2,8 | 0,0027 | 0,0063 | 2600 | 2600 |

Рис. 1.43. Результаты поиска решения при первом варианте производства

Решение нелинейной задачи, которая описывает третий вариант производства, имеет вид как на рис. 1.44.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Продукция* | $P_1$ | $P_2$ | *Суммарная прибыль* | | | | |
| 2 | *Оптимальный план* | 393,3594267 | 195,4087459 | 69649,71764 | | | | |
| 3 | *Прибыль от реализации одной усл.ед. продукции не учитывающая эффект масштаба производства* | 110 | 135 | | | | | |
| 4 | *Прибыль от реализации одной усл.ед. продукции учитывающая эффект масштаба производства* | 0,08 | 0,015 | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | *Ресурсы* | *Расход ресурсов на производство одной усл.ед. годной продукции* | | *Расход ресурсов на производство одной усл.ед. бракованной продукции* | | *Суммарный расход* | *Запас* | |
| 8 | | $P_1$ | $P_2$ | $P_1$ | $P_2$ | | | |
| 9 | $R_1$ | 3,5 | 5,7 | 0,0036 | 0,0053 | 3250,000008 | 3250 | |
| 10 | $R_2$ | 2,7 | 9,3 | 0,0045 | 0,0033 | 3701,67327 | 4180 | |
| 11 | $R_3$ | 3,2 | 2,8 | 0,0027 | 0,0063 | 2464,23292 | 2600 | |
| 12 | | | | | | | | |

Рис. 1.44. Результаты поиска решения при третьем варианте производства

Сравним полученные результаты.

| Вариант производства | Оптимальные объемы выпуска продукции и максимальная прибыль | | |
|---|---|---|---|
| | $x_1^*$ | $x_2^*$ | $f(x^*)$ |
| Брак и эффект масштаба отсутствуют | 677,73 | 154,03 | 95 344 |
| Сопровождается выпуском брака и эффектом масштаба | 497,44 | 99,29 | 88 065 |
| Сопровождается выпуском брака, а эффект масштаба отсутствует | 393,36 | 195,41 | 69 650 |

Анализ данных показывает следующее:

1. Наличие брака при выпуске продукции существенно снижает суммарный объем выпуска продукции $x_1^* + x_2^*$, что обусловливается ограниченными объемами ресурсов у производителя.

2. Эффект масштаба (при наличии брака) приводит к увеличению максимальной прибыли и оказывает значительное влияние на оптимальные планы выпуска продукции.

3. Пренебрежение как фактом бракованной продукции, так и действием эффекта масштаба может приводить к неадекватным значениям оптимального выпуска продукции, значительно отличающимся от реальных.

### *Задания для самостоятельной работы*

1. На кондитерскую фабрику города Покров перед Новым годом поступили заказы на подарочные наборы конфет из магазинов. Возможные варианты наборов, их стоимость и товарные запасы представлены в таблице.

| Конфета | Вес конфет в наборах, кг | | | Запас конфет, кг |
|---|---|---|---|---|
| | № 1 | № 2 | № 3 | |
| «Сникерс» | 0,3 | 0,2 | 0,4 | 600 |
| «Марс» | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 700 |
| «Баунти» | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 500 |
| Цена, р. | 720 | 620 | 760 | |

Определите оптимальное количество подарочных наборов, обеспечивающее максимальный доход от продажи.

Подарочные наборы № 1 хранятся на двух складских базах, причем на первой базе может находиться только 500 наборов, а все остальные наборы перевозят на вторую базу. На наборы этого вида поступили заказы из трех фирменных магазинов – «Любава», «Сластена» и «Конфетное счастье» – в количестве 2 200, 500 и 300 шт. соответственно. Расходы на перевозку (р/шт) составляют:

| Складская база | Фирменный магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «Любава» | «Сластена» | «Конфетное счастье» |
| 1 | 50 | 20 | 30 |
| 2 | 90 | 80 | 70 |

Определите количество подарочных наборов № 1, которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Подарочные наборы № 2 также хранятся на двух складских базах, причем на второй базе может находиться только 800 наборов, а все остальные наборы перевозят на первую базу. На наборы этого вида поступили заказы из трех фирменных магазинов – «Конфетница», «Леденец» и «Шоколад» – в количестве 1 500, 500 и 1 000 шт. соответственно. Расходы на перевозку (р/шт) составляют:

| Складская база | Фирменный магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «Конфетница» | «Леденец» | «Шоколад» |
| 1 | 45 | 56 | 26 |
| 2 | 23 | 36 | 48 |

Определите количество подарочных наборов № 2, которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Найдите максимальную прибыль от реализации все подарочных наборов с учетом транспортных расходов.

2. Фирма производит и продает спальные гарнитуры «Гармония», «Сладкий сон» и «Нежность» из древесины трех видов. Расход каждого вида древесины в кубометрах на каждое изделие задан в таблице.

| Вид древесины | Расход древесины, м$^3$ | | | Запас древесины, м$^3$ |
|---|---|---|---|---|
| | «Гармония» | «Сладкий сон» | «Нежность» | |
| Дуб | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 360 |
| Сосна | 0,4 | 0,2 | 0,2 | 5 200 |
| Орех | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 220 |
| Стоимость, тыс. р. | 220 | 180 | 300 | |

Определите оптимальное количество спальных гарнитуров каждого вида, которое следует поставлять на продажу для получения максимального дохода фирмы.

Спальные гарнитуры «Гармония» хранятся на двух складских базах, причем на первой базе может находиться только пять гарнитуров, а все остальные гарнитуры перевозят на вторую базу. На гарнитуры «Гармония» поступили заказы из трех фирменных магазинов – «Лебедушка», «Мир мебели» и «Мебель в дом» – в количестве по 500 шт. в каждый магазин. Расходы на перевозку (тыс. р/шт) составляют:

| Складская база | Фирменный магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «Лебедушка» | «Мир мебели» | «Мебель в дом» |
| 1 | 15 | 28 | 45 |
| 2 | 33 | 36 | 26 |

Определите количество спальных гарнитуров, которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Спальные гарнитуры «Сладкий сон» также хранятся на двух складских базах, причем на первой базе может находиться только 500 гарнитуров, а все остальные гарнитуры перевозят на вторую базу. На гарнитуры этого вида поступили заказы из трех фирменных магазинов – «Новоселье», «Мой дом» и «Все для сладких снов» – в количестве 2 000, 1 500 и 500 шт. соответственно. Расходы на перевозку (тыс. р/шт) составляют:

| Складская база | Фирменный магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «Новоселье» | «Мой дом» | «Все для сладких снов» |
| 1 | 56 | 35 | 48 |
| 2 | 27 | 33 | 29 |

Определите количество спальных гарнитуров «Сладкий сон», которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Найдите максимальную прибыль от реализации всех спальных гарнитуров с учетом транспортных расходов.

3. Фирма решила открыть на основе технологии производства чешского стекла, фарфора и хрусталя линию по изготовлению ваз, графинов и сервизов и их декорированию. Затраты сырья на производство этой продукции представлены в таблице:

| Сырье | Расход сырья на производство | | | Поставки сырья в неделю, кг |
|---|---|---|---|---|
| | ваз | графинов | сервизов | |
| Кобальт | 2 | 1,5 | 2 | 300 |
| Сусальное 24-каратное золото | 2 | 1 | 2 | 250 |
| Серебро | 1 | 1 | 3 | 400 |
| Оптовая цена, ден. ед/шт | 700 | 500 | 600 | |

Определите оптимальный объем выпуска продукции, обеспечивающий максимальный доход от продаж.

Все изготовленные вазы хранятся на двух складских базах, причем на первой базе может находиться только 50 штук, а все остальные вазы перевозят на вторую базу. На вазы поступили заказы из трех фирменных магазинов – «Подарки», «Все из стекла» и «Для женщин» – в количестве 20, 35 и 20 шт. соответственно. Расходы на перевозку (ден. ед/шт) составляют:

| Складская база | Фирменный магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «Подарки» | «Все из стекла» | «Для женщин» |
| 1 | 23 | 26 | 36 |
| 2 | 24 | 27 | 19 |

Определите количество изготовленных ваз, которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Графины также хранятся на двух складских базах, причем на первой базе может находиться только 50 штук, а все остальные графины перевозят на вторую базу. На графины поступили заказы из трех фирменных магазинов – «Карс», «1 000 мелочей» и «Посуда центр» – в количестве 1 500, 500 и 1 000 шт. соответственно. Расходы на перевозку (ден. ед/шт) составляют:

| Складская база | Фирменный магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «Карс» | «1 000 мелочей» | «Посуда центр» |
| 1 | 26 | 22 | 23 |
| 2 | 24 | 25 | 27 |

Определите количество графинов, которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Найдите максимальную прибыль от реализации всей продукции фирмы с учетом транспортных расходов.

4. Фирма производит одежду для охотников, туристов и охранных структур. Дополнительно фирма решила изготавливать шапки, подстежки и жилеты из натурального меха. Затраты на производство этих изделий и запасы сырья представлены в таблице.

| Сырье | Расход сырья на производство | | | Средний запас в месяц, ед. |
|---|---|---|---|---|
| | шапок | подстежек | жилетов | |
| Мех | 22 | 140 | 60 | 60 000 |
| Ткань | 1,5 | 30 | 15 | 1 350 |
| Фурнитура | 5 | 15 | 10 | 700 |
| Оптовая цена, ден. ед/шт | 400 | 1 600 | 1 000 | |

Определите объемы производства этих изделий, обеспечивающие максимальный доход от продажи.

Все изготовленные подстежки хранятся на двух складских базах, причем на второй базе может находиться только 10 штук, а все остальные подстежки перевозят на первую базу. На подстежки поступили заказы из трех фирменных магазинов – «Охотник», «Турист» и «Одежда» – в количестве 20, 20 и 10 шт. соответственно. Расходы на перевозку (ден. ед/шт) составляют:

| Складская база | Фирменный магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «Охотник» | «Турист» | «Одежда» |
| 1 | 45 | 57 | 43 |
| 2 | 49 | 40 | 47 |

Определите количество подстежек, которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Жилеты также хранятся на двух складских базах, причем на первой базе может находиться только 5 штук, а все остальные жилеты перевозят на вторую базу. На жилеты поступили заказы из трех фирменных магазинов – «Все для охоты», «Спортмастер» и «Рыбак» – в количестве 30, 45 и 25 шт. соответственно. Расходы на перевозку (ден. ед/шт) составляют:

| Складская база | Фирменный магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «Все для охоты» | «Спортмастер» | «Рыбак» |
| 1 | 33 | 41 | 38 |
| 2 | 37 | 34 | 36 |

Определите количество жилетов, которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Найдите максимальную прибыль от реализации всей продукции фирмы с учетом транспортных расходов.

5. Коммерческие расчеты, проведенные студентами в деревне, привели к более выгодному использованию яблок и груш путем их засушки и последующей продажи зимой в виде смеси сухофруктов, варианты которых представлены в таблице:

| Плоды | Расход плодов на производство 1 кг смеси | | | Сборка плодов, кг/день |
|---|---|---|---|---|
| | смесь 1 | смесь 2 | смесь 3 | |
| Анис (яблоки) | 0,25 | 0,25 | 0,3 | 15 |
| Штрейфлинг (яблоки) | 1 | 0,25 | 0,55 | 25 |
| Груши | 0 | 0,5 | 0,6 | 16 |
| Оптовая цена, р/кг | 400 | 500 | 350 | |

Определите оптимальное количество упаковок сухофруктов по 1 кг смесей первого, второго и третьего вида, которое необходимо заготавливать в деревне ежедневно для обеспечения максимального дохода от продажи в день.

Смесь 1 хранится на двух складских базах, причем на первой базе может находиться только 10 кг, а остальное количество смеси 1 перевозят на вторую базу. На эту смесь поступили заказы из трех торговых точек – «Фрукты и овощи», «Яблонька» и «Вишневый сад» – в количестве 10, 8 и 6 кг соответственно. Расходы на перевозку (р/кг) составляют:

| Складская база | Торговая точка | | |
|---|---|---|---|
| | «Фрукты и овощи» | «Яблонька» | «Вишневый сад» |
| 1 | 23 | 24 | 28 |
| 2 | 24 | 25 | 21 |

Определите количество смеси 1, которое доставят в каждую торговую точку, исходя из минимизации транспортных расходов.

Смесь 2 также хранится на двух складских базах, причем на второй базе может находиться только 20 кг, а остальное количество смеси перевозят на первую базу. На эту смесь поступили заказы из трех детских садов – «Солнышко», «Малышок» и «Радуга» – в количестве 21, 23 и 10 кг соответственно. Расходы на перевозку (р/кг) составляют:

| Складская база | Детский сад | | |
|---|---|---|---|
| | «Солнышко» | «Малышок» | «Радуга» |
| 1 | 36 | 34 | 32 |
| 2 | 31 | 29 | 35 |

Определите количество смеси 2, которое доставят в каждый детский сад, исходя из минимизации транспортных расходов.

Найдите максимальную прибыль от реализации всей продукции с учетом транспортных расходов.

6. Для производства трех сортов мороженого (сливочного, молочного и пломбира) комбинат использует сливки и сахар. Затраты этих продуктов и их суточные запасы приведены в таблице:

| Ресурсы | Расход на производство 1 кг мороженого | | | Общий запас ресурсов |
|---|---|---|---|---|
| | сливочного | молочного | пломбира | |
| Сливки, кг | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 160 |
| Сахар, кг | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 240 |
| Трудоемкость, чел/ч | 2 | 3 | 3 | 1 800 |
| Цена, р. | 75 | 60 | 90 | |

Считая, что сбыт мороженого полностью обеспечен, сколько сливочного, молочного мороженого и пломбира должен выпускать комбинат в сутки, чтобы доход от реализации был максимальным.

Сливочное мороженое хранится на двух складских базах, причем на первой базе может находиться только 200 кг, а остальное количество мороженого перевозят на вторую базу. На сливочное мороженое поступили заказы из трех магазинов – «Лента», «Слата» и «Окей» – в количестве 350, 350 и 300 кг соответственно. Расходы на перевозку (р/кг) составляют:

| Складская база | Магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «Лента» | «Слата» | «Окей» |
| 1 | 10 | 12 | 13 |
| 2 | 14 | 11 | 9 |

Определите количество сливочного мороженого, которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Молочное мороженое также хранится на двух складских базах, причем на второй базе может находиться только 2 кг, а остальное количество смеси перевозят на первую базу. На это мороженое поступили заказы из трех торговых точек – «Морозко», «Зимушка» и «Сладости» – в количестве 56, 44 и 35 кг соответственно. Расходы на перевозку (р/кг) составляют:

| Складская база | Торговая точка | | |
|---|---|---|---|
| | «Морозко» | «Зимушка» | «Сладости» |
| 1 | 13 | 15 | 11 |
| 2 | 17 | 11 | 21 |

Определите количество молочного мороженого, которое доставят в каждую торговую точку, исходя из минимизации транспортных расходов.

Найдите максимальную прибыль от реализации всей продукции с учетом транспортных расходов.

7. Для производства карамели трех видов – «Аленка», «Цитрусовый микст» и «Барбарис» – кондитерская фабрика использует сахар, фруктовое пюре и какао. Нормы расхода этих продуктов и общий запас производственных ресурсов указан в таблице:

| Ресурс | Расход на производство 1 кг карамели | | | Общий запас ресурсов, кг |
|---|---|---|---|---|
| | «Аленка» | «Цитрусовый микст» | «Барбарис» | |
| Сахар | 0,2 | 0,6 | 0,4 | 180 |
| Фруктовое пюре | 0,4 | 0,2 | 0,2 | 120 |
| Какао | 0,4 | 0,5 | 0,3 | 180 |
| Оптовая цена, ден. ед/кг | 45 | 60 | 70 | |

Считая, что сбыт конфет полностью обеспечен, определить, сколько карамели надо выпускать фабрике, чтобы доход от реализации был максимальным.

Карамель «Аленка» хранится на двух складских базах, причем на первой базе может находиться только 50 кг, а всю остальную карамель перевозят на вторую базу. На карамель этого вида поступили заказы из трех фирменных магазинов – «Сладости», «Конфеты России» и «Медуница» – в количестве 73, 14 и 25 кг соответственно. Расходы на перевозку (ден. ед/кг) составляют:

| Складская база | Фирменный магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «Сладости» | «Конфеты России» | «Медуница» |
| 1 | 23 | 14 | 15 |
| 2 | 16 | 18 | 24 |

Определите количество карамели «Аленка», которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Карамель «Барбарис» также хранится на двух складских базах, причем на второй базе может находиться только 20 кг, а всю остальную карамель перевозят на первую базу. На карамель этого вида поступили заказы из трех оптовых магазинов – «Окей», «Слата» и «Лента» – в количестве 350, 200 и 159 кг соответственно. Расходы на перевозку (ден. ед/кг) составляют:

| Складская база | Оптовый магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «Окей» | «Слата» | «Лента» |
| 1 | 26 | 27 | 33 |
| 2 | 29 | 31 | 36 |

Определите количество карамели «Барбарис», которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Найдите максимальную прибыль от реализации всей карамели с учетом транспортных расходов.

8. Для выпуска трех сортов теста (бисквитное, песочное и слоеное) кондитерская фабрика использует яйца и сахар. Расход этих ресурсов, а также затраты труда и общее количество имеющихся ресурсов приведены в таблице:

| Ресурс | Расход на производство 1 кг теста | | | Общий запас ресурсов |
|---|---|---|---|---|
| | бисквитного | песочного | слоеного | |
| Яйца, шт. | 5 | 2 | 6 | 1 000 |
| Сахар, кг | 0,3 | 0,25 | 0,3 | 75 |
| Трудоемкость, чел/ч | 0,25 | 0,5 | 0,5 | 125 |
| Оптовая цена, р/кг | 160 | 130 | 250 | |

Считая, что сбыт теста полностью обеспечен, определить, сколько теста каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации был максимальным.

Песочное тесто хранится на двух складских базах, причем на первой базе может находиться только 50 кг, а все остальное тесто перевозят на вторую базу. На песочное тесто поступили заказы из трех кондитерских фабрик – «Мария», «Блисс» и «Бельгийские пекарни» – в количестве 60, 50 и 80 кг соответственно. Расходы на перевозку (р/кг) составляют:

| Складская база | Кондитерская фабрика | | |
|---|---|---|---|
| | «Мария» | «Блисс» | «Бельгийские пекарни» |
| 1 | 45 | 51 | 57 |
| 2 | 49 | 46 | 51 |

Определите количество теста, которое доставят на каждую фабрику, исходя из минимизации транспортных расходов.

Слоеное тесто также хранится на двух складских базах, причем на второй базе может находиться только 50 кг, а все остальное тесто перевозят на первую базу. На тесто этого вида поступили заказы из трех магазинов – «К чаю», «Сладкоежка» и «К празднику» – в количестве 65, 55 и 45 кг соответственно. Расходы на перевозку (р/кг) составляют:

| Складская база | Магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «К чаю» | «Сладкоежка» | «К празднику» |
| 1 | 32 | 30 | 44 |
| 2 | 45 | 40 | 41 |

Определите количество слоеного теста, которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Найдите максимальную прибыль от реализации всего теста с учетом транспортных расходов.

9. Филиал завода изготавливает корпуса для холодильников наиболее популярных марок: «Орск», «Минск» и «Стинол», комплектуя затем их оборудованием, поставляемым другими предприятиями. В таблице указаны нормы затрат материалов для изготовления корпусов, месячные объемы ресурсов и прибыль от реализации холодильника каждой марки:

| Ресурс | Расход на один холодильник | | | Объем ресурсов |
|---|---|---|---|---|
| | «Орск» | «Минск» | «Стинол» | |
| Металл, $м^2$ | 2 | 2 | 1 | 850 |
| Пластик, $м^2$ | 1 | 1 | 2 | 400 |
| Краска, кг | 2 | 2 | 2 | 500 |
| Прибыль, усл. ед/шт | 180 | 150 | 200 | |

Определить, сколько холодильников необходимо производить, чтобы получить максимальную прибыль от их реализации.

Холодильники «Орск» хранятся на двух складских базах, причем на первой базе может находиться только 50 шт., а все остальные перевозят на вторую базу. На эти холодильники поступили заказы из трех специализированных фирм в количестве 150, 120 и 150 шт. соответственно. Расходы на перевозку (усл. ед/шт) составляют:

| Складская база | Специализированная фирма | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 46 | 52 | 58 |
| 2 | 50 | 47 | 52 |

Определите количество холодильников «Орск», которое доставят в каждую фирму, исходя из минимизации транспортных расходов.

Холодильники «Стинол» также хранятся на двух складских базах, причем на второй базе может находиться только 50 шт., а все остальные холодильники перевозят на первую базу. На холодильники этого вида поступили заказы из трех оптовых магазинов – «Окей», «Эльдорадо» и «М-видео» – в количестве 70, 60 и 50 шт. соответственно. Расходы на перевозку (усл. ед/шт) составляют:

| Складская база | Оптовый магазин | | |
|---|---|---|---|
| | «Окей» | «Эльдорадо» | «М-видео» |
| 1 | 33 | 31 | 45 |
| 2 | 46 | 41 | 42 |

Определите количество холодильников «Стинол», которое доставят в каждый магазин, исходя из минимизации транспортных расходов.

Найдите максимальную прибыль от реализации всех холодильников с учетом транспортных расходов.

10. Для продажи меха на престижных аукционах на ферме выращиваются голубая норка, песец и лиса. Чтобы обеспечить нормальные условия их выращивания, используют три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должно получать каждое животное, запасы корма каждого вида и прибыль от реализации одной шкурки животного приведены в таблице:

| Вид корма | Количество корма, которое ежедневно получает | | | Запасы корма, кг |
|---|---|---|---|---|
| | голубая норка | песец | лиса | |
| Овощи | 2 | 3 | 2 | 180 |
| Крупа | 4 | 1 | 3 | 240 |
| Мясо | 6 | 3 | 3 | 426 |
| Прибыль от одной шкурки, усл. ед. | 320 | 240 | 200 | |

Определить, сколько норок, песцов и лис следует выращивать, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

Шкурки голубой норки хранятся на двух складских базах, причем на первой базе может находиться только 25 шт., а все остальные перевозят на вторую базу. Эти шкурки решили выставить на продажу на трех аукционах в количестве по 50 шт. на каждом. Расходы на перевозку (усл. ед/шт) составляют:

| Складская база | Аукцион по продаже меха | | |
|---|---|---|---|
| | Kopenhagen Fur (Дания) | NAFA (Канада) | Союзпушнина (Россия) |
| 1 | 44 | 50 | 56 |
| 2 | 48 | 45 | 50 |

Определите количество шкурок голубой норки, которое доставят на каждый аукцион, исходя из минимизации транспортных расходов.

Шкурки песцов также хранятся на двух складских базах, причем на второй базе может находиться только 20 шт., а все остальные шкурки перевозят на первую базу. Эти шкурки решили выставить на продажу на трех аукционах в количестве по 25 шт. на каждом. Расходы на перевозку (усл. ед/шт) составляют:

| Складская база | Аукцион по продаже меха | | |
|---|---|---|---|
| | Kopenhagen Fur (Дания) | NAFA (Канада) | Союзпушнина (Россия) |
| 1 | 35 | 33 | 47 |
| 2 | 48 | 43 | 45 |

Определите количество шкурок песцов, которое доставят на каждый аукцион, исходя из минимизации транспортных расходов.

Найдите максимальную прибыль от реализации всей пушнины с учетом транспортных расходов.

# 2. Инструментальные средства в математической экономике

## 2.1. Кривая спроса

В самом общем виде рыночный спрос можно определить как готовность потребителей приобретать товары и услуги. Между тем под такой готовностью понимается не сама потребность в благах и желание их иметь, а прежде всего согласие заплатить за эти блага. Поэтому в экономическом смысле **спрос** – это готовность пожертвовать альтернативными возможностями использования имеющихся у покупателей ресурсов ради приобретения данного блага.

Такое определение, хотя и отражает содержательную сторону явления, лишено важнейших экономических признаков – количественной и временной характеристики. Поэтому экономисты используют более точное понятие – «величина (объем) рыночного спроса». Совершенно очевидно, что величина спроса будет зависеть от размера той жертвы, которую готовы принести покупатели ради приобретения блага. Эта жертва принимает форму цены блага.

**Величина (объем) рыночного спроса** – это максимальное количество данного блага, которое готовы купить потребители при текущей цене блага в единицу времени.

**Функция спроса –** это установленная зависимость, отражающая характер изменения величины спроса при изменении влияющих на него факторов.

Функция спроса по цене, отражая зависимость величины спроса на благо от изменения цены этого блага, показывает то количество блага, которое будет приобретено покупателями при разных ценах блага, но «при прочих равных условиях». Различают прямую и обратную функции спроса.

**Прямая функция спроса по цене** отражает зависимость изменения величины спроса от цены. Выраженная в общей форме, она принимает вид уравнения

$$Q = a - bP,$$

где $Q$ – величина спроса на благо, $a$ – постоянный коэффициент, $b$ – коэффициент влияния цены блага $P$ на величину спроса.

**Обратная функция спроса по цене** отражает изменение цены в зависимости от изменения величины спроса. Фактически она показывает стоимостную оценку блага потребителем. Аналитическая запись обратной функции спроса по цене выводится из уравнения прямой функции спроса. Следовательно

$$P = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}Q.$$

Графическая форма обратной функции спроса по цене представляет собой кривую спроса. Построение кривой спроса осуществляется в системе координат, где на оси ординат откладывают значения цены ($P$) за единицу блага, а на оси абсцисс – значения объема спроса ($Q$) для каждого уровня цены за единицу времени. Пересечение значений цены и объемов спроса на координатной плоскости иллюстрирую точки, соответствующие величине спроса для каждой заданной цены. Соединив эти точки, получаем линию спроса, которая представляет собой набор точек, отражающих разные варианты пар «цена – количество».

**Линейные функции спроса** будут представлены прямыми линиями, которые можно построить по двум любым точкам, например: $Q = 60,\ P = 40$ и $Q = 180,\ P = 0$. **Нелинейные функции спроса** будут представлены в виде кривых, для построения которых потребуется нахождение уже множества точек (рис. 2.1)

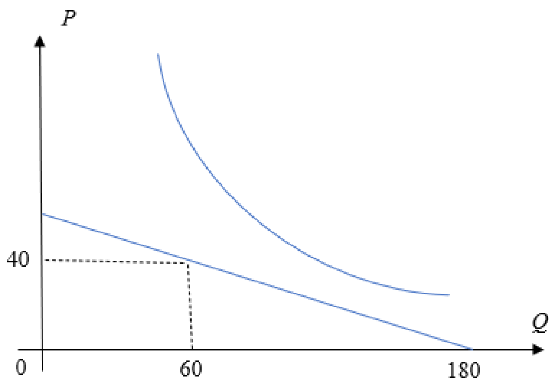



Рис. 2.1. Графическое изображение функции спроса

**Кривая спроса** – линия, показывающая связь между ценой блага и величиной спроса на него в единицу времени и отражающая характер изменения величины спроса на благо в зависимости от изменения цены блага.

## 2.2. Оценка кривой спроса

Для определения цены, приносящей максимальную прибыль, необходимо знать две вещи:

– переменные затраты на производство каждой единицы продукции $S$;

– кривую спроса на продукт. Кривая спроса показывает количество единиц продуктов, на которое будет спрос в зависимости от конкретной цены. Таким образом, если назначить цену единицы продукции $p$, то по кривой спроса можно определить число $Q(p)$, эквивалентное количеству единицы продукции, которое будет востребовано по цене $p$. Безусловно, кривая спроса постоянно меняется и нередко зависит от факторов, находящихся вне контроля компании, таких, как состояние экономики и цены конкурентов).

Если значение затрат и кривая спроса известны, прибыль, соответствующая цене $p$, равна $(p - S) \cdot Q(p)$. Если известно уравнение для $Q(p)$, вычисляющее количество востребованного продукта для каждой цены, можно с помощью инструмента **Поиск решения** (*Solver*) найти цену, обеспечивающую максимальную прибыль.

В соответствии с кривой спроса *ценовая эластичность* спроса – это процентное соотношение спроса в результате повышения цены на 1 %. Если эластичность выше 1 %, спрос является эластичным по цене. Когда спрос эластичен по цене, снижение цены увеличивает выручку. Если эластичность меньше 1%, спрос является неэластичным по цене. Когда спрос неэластичен по цене, снижение цены снижает выручку.

Пусть $q$ – величина спроса на продукт. Для оценки кривой спроса наиболее часто используют две формы:

– **Линейная кривая спроса.** В этом случае спрос выражается линейным соотношением вида $q = a - bp$. Например, $q = 10 - p$ – линейная кривая спроса. Если кривая спроса линейная, то эластичность постоянно меняется.

– **Степенная кривая спроса.** В этой ситуации кривая спроса описывается степенной кривой вида $q = ap^b$, где $b < 0$. Уравнение $q = \frac{100}{p^2}$ является примером степенной кривой спроса. Если спрос соответствует степенной кривой, эластичность равна $-b$ для любой цены. Таким образом, для кривой спроса $q = \frac{100}{p^2}$ ценовая эластичность всегда равна 2.

Предположим, что кривая спроса на продукт соответствует линейной или степенной кривой спроса. По известной текущей цене и спросу на продукт, а также ценовой эластичности спроса построим кривую спроса.

***Пример 2.1.*** Пусть в настоящее время продукт продается за 100 р. и спрос на него составляет 500 ед. Ценовая эластичность спроса для продукта равна 2. Предположим, что кривая спроса является линейной. Необходимо определить уравнение кривой спроса.

Если заданы две точки, то через них можно провести только одну прямую. Для кривой спроса действительно известны две точки, и первая из них – $p = 100$ и $q = 500$. Поскольку эластичность спроса равна 2, то повышение цены на 1 % приводит к уменьшению спроса на 2 %.

Следовательно, если $p = 101$ (повышение на 1%), спрос падает на 2 % от 500 (10 ед.) до 490. Таким образом, $p = 101$ и $q = 490$ – это вторая точка кривой спроса. Теперь с помощью линии тренда в *MS Excel* можно найти прямую линию, проходящую через точки (100; 500) и (101; 490).

Начнем с ввода этих точек в ячейки A2:B3, как показано на рис. 2.2. Затем выделите диапазон A2:B3 и на вкладке **Вставка** в группе **Диаграммы** выберите **Точечная или пузырьковая диаграмма**.

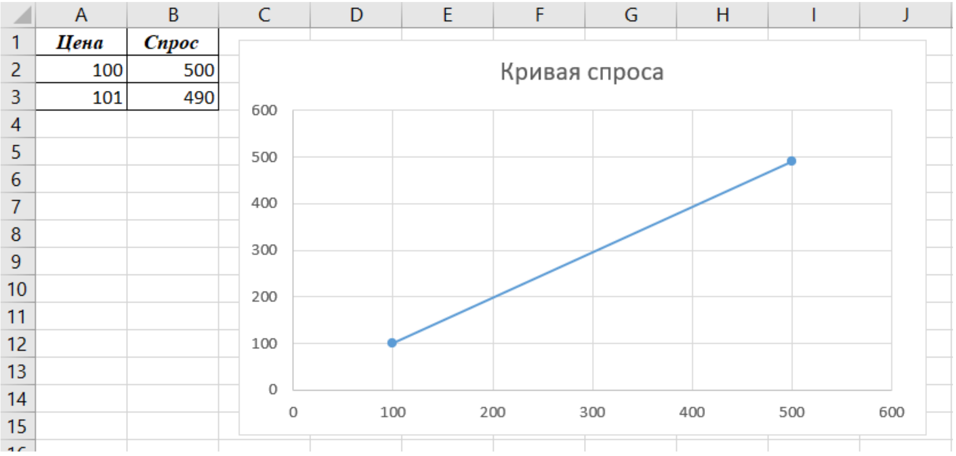



Рис. 2.2. Подбор линейной кривой спроса

График получился возрастающим (рис. 2.2), т.е. повышение цены ведет к повышению спроса, а это неверно. Проблема в следующем: при наличии только двух точек данных *MS Excel* предполагает, что точки данных, по которым строится график, находятся в отдельных столбцах, а не в строчках. В подтверждение того, что отдельные точки находятся в разных строках, щелкните в области диаграммы и затем в секции **Изменить тип диаграммы**. В открывшемся окне на выбор предлагается два типа построенной диаграммы – возрастающая и убывающая. Выберем убывающую кривую спроса.

Теперь щелкните правой кнопкой мыши на одной из точек, выберите **Добавить линию тренда**, затем установите переключатель в положение **Линейная** и отметьте флажок **Показать уравнение на диаграмме**. Появится линейный график, а также уравнение прямой, как показано на рис. 2.3.

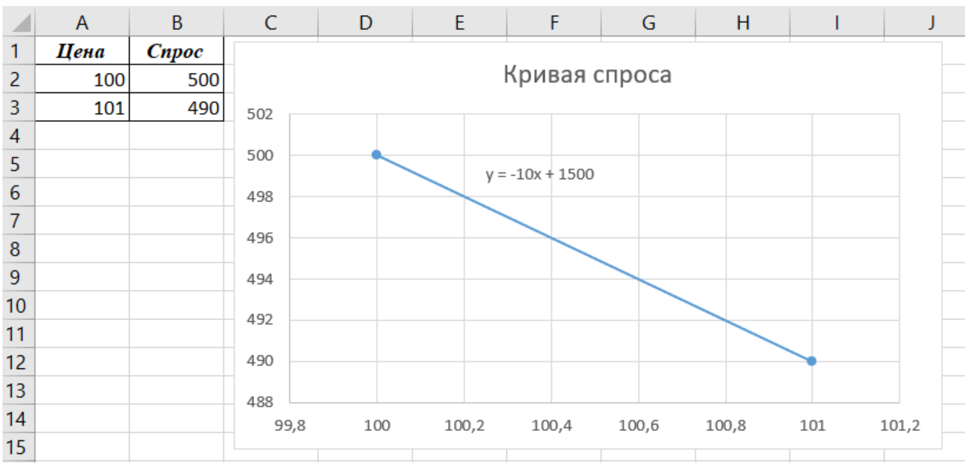



Рис. 2.3. Линейная кривая спроса

Так как $x$ равен цене, а $y$ – спросу, уравнение кривой спроса имеет вид $q = 1500 - 10p$. Это уравнение означает, что каждое повышение цены на 1 р. приводит к потере 10 ед. спроса. Разумеется, спрос не может быть линейным для всех значений цены, поскольку для больших значений $p$ линейная кривая спроса приведет к негативному спросу. Однако для цен, близких к текущей цене, линейная кривая спроса является достаточно хорошим приближением к истинной кривой спроса на продукт.

***Пример 2.2.*** Предположим, что в настоящее время продукт продается за 100 р. и спрос составляет 500 ед. Ценовая эластичность спроса для продукта равна 2. Построить степенную кривую спроса.

Уравнение кривой спроса будет иметь вид $q = ap^{-b}$. Для построения кривой спроса необходимо найти параметр $a$. Для этого внесем уже известную информацию в ячейки A2 и B2, а также введем в ячейку D2 произвольное значение параметра $a$. Так как эластичность спроса равна 2, то кривая спроса имеет вид $q = \frac{a}{p^2}$, где параметр $a$ неизвестен. В ячейку F2 введем спрос для цены 100 р., соответствующий значению $a$ в ячейке D2 по формуле =F2*A2^–2 (рис. 2.4).

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ***Цена*** | ***Спрос*** | | ***Параметр*** | | ***Спрос для цены 100 рублей*** |
| 2 | 100 | 500 | | 1 | | 0,0001 |

Рис. 2.4. Исходная информация для поиска параметра

Теперь с помощью инструмента **Подбор параметра** определим значение параметра $a$, при котором спрос для цены 100 р. составляет 500 ед. Для этого на вкладке **Данные** в раскрывающемся списке **Анализ «что если»** выберем **Подбор параметра**. Заполним диалоговое окно следующим образом: в поле **Установить в ячейке** укажем ячейку с уравнением кривой спроса F2, в поле **Значение** внесем число 500 и в поле **Изменяя значение ячейки** определим ячейку D2, в которой и должно появится искомое значение параметра (рис. 2.5).

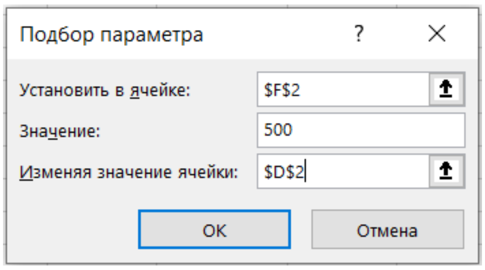
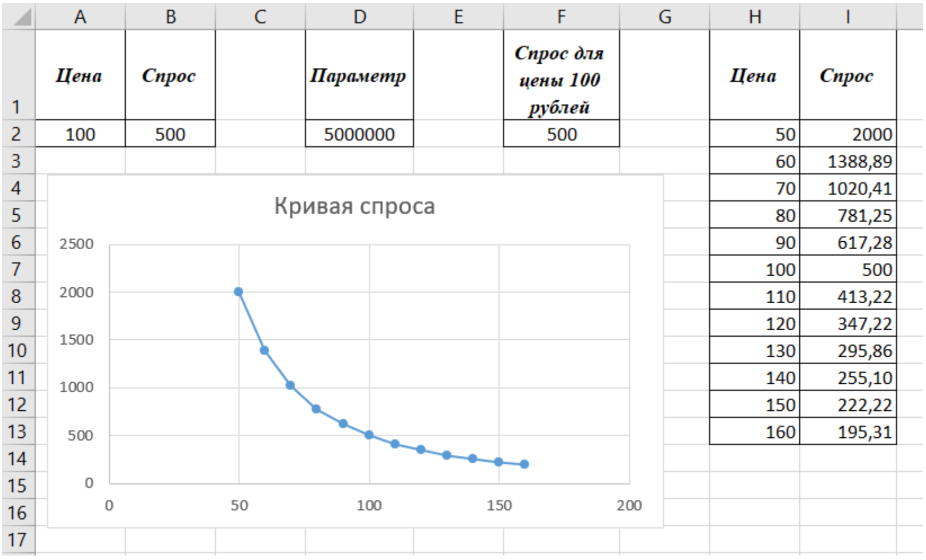



Рис. 2.5. Заполнение окна **Подбор параметра**

Оказывается, спросу в 500 ед. при цене 100 р. соответствует $a$, равное 5 000 000. Таким образом, кривая спроса описывается уравнением $q = 5\,000\,000\,p^{-2}$.

Для построения кривой спроса определим множество точек, через которые будет проходить эта кривая. В ячейки H2:H13 внесем различные значения аргумента функции, а в ячейках I2:I13 вычислим соответствующие значения спроса в ячейке I2 по формуле =$D$2*H2^–2, в ячейке I3 по формуле =$D$2*H3^–2 и т.д. Затем выделите диапазон H2:I13 и на вкладке **Вставка** в группе **Диаграммы** выберите **Точечная или пузырьковая диаграмма** (рис. 2.6).



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Цена* | *Спрос* | | *Параметр* | | *Спрос для цены 100 рублей* | | *Цена* | *Спрос* |
| 2 | 100 | 500 | | 5000000 | | 500 | | 50 | 2000 |
| 3 | | | | | | | | 60 | 1388,89 |
| 4 | | | | | | | | 70 | 1020,41 |
| 5 | | | | | | | | 80 | 781,25 |
| 6 | | | | | | | | 90 | 617,28 |
| 7 | | | | | | | | 100 | 500 |
| 8 | | | | | | | | 110 | 413,22 |
| 9 | | | | | | | | 120 | 347,22 |
| 10 | | | | | | | | 130 | 295,86 |
| 11 | | | | | | | | 140 | 255,10 |
| 12 | | | | | | | | 150 | 222,22 |
| 13 | | | | | | | | 160 | 195,31 |



Рис. 2.6. Степенная кривая спроса

*Каким образом кривая спроса показывает готовность покупателя платить за продукт?*

Компания пытается продать программное обеспечение (ПО) крупной корпорации. Пусть $q$ – количество копий ПО, которое требуется корпорации, а $p$ – цена ПО. Определено, что кривая спроса на ПО описывается уравнением $q = 400 - p$. Очевидно, что клиент хотел бы платить меньше за каждую дополнительную копию ПО. В этой кривой спроса заключена информация о том, сколько компания готова платить за каждую копию ПО. Эта информация является ключевой для максимального увеличения прибыльности продаж.

Перепишем уравнение кривой спроса как $p = 400 - q$. Таким образом, если $q = 1$, то $p = 399$ долл. и т.д. Теперь попытаемся определить ценность, которую клиент придает каждой из первых двух копий ПО. Предположим, что клиент будет покупать копию ПО тогда и только тогда, когда ценность этой копии превысит запрошенную цену. При цене 400 долл. спрос равен 0, так что первая копия не может стоить 400 долл. Однако при цене 399 долл. образуется спрос на одну копию ПО. Следовательно, первая копия ПО должна стоить где-то между 399 и 400 долл. Аналогично вторую копию ПО клиент за 399 долл. не купит. Однако при цене 398 долл. клиент покупает две копии, т.е. клиент покупает вторую копию. Следовательно, потребительская ценность второй копии лежит где-то между 399 и 398 долл.

Можно показать, что наилучшим приближением стоимости $i$-й единицы продукта, покупаемой клиентом, является цена, при которой спрос равен $i - 0{,}5$. Например, если установить для $q$ значение 0,5, то стоимость первой копии равна

400 – 0,5 = 399,5 долл. Аналогично, если установить $q = 1{,}5$, стоимость второй копии равна 400 – 1,5 = 398,5 долл.

## 2.3. Ценообразование продуктов с сопутствующими товарами

Покупка некоторых потребительских товаров часто приводит к покупке сопутствующих товаров, или товаров принудительного ассортимента. В следующей таблице приведено несколько примеров таких покупок

| Первичная покупка | Сопутствующий товар |
|---|---|
| Бритвенный станок | Лезвия |
| Мужской костюм | Рубашка и/или галстук |
| Компьютер | Руководство по программному обеспечению |
| Игровая приставка | Видеоигра |

Возникает задача, как рассчитать цену первичного товара, максимизирующую сумму прибылей, полученную от исходного и сопутствующего товара.

***Пример 2.3.*** Пусть в настоящее время вы платите за бритвенный станок 5 долл. и продаете 6 млн бритвенных станков. Предположим, что переменные затрат на производство бритвенного станка составляют 2 долл., а ценовая эластичность спроса на продукцию равна 2. Какую цену на станок надо назначить?

Предположим (ошибочно), что покупатели бритвенных станков не покупают лезвия. Кривая спроса (в случае линейной кривой спроса) показана на рис. 2.7. Двумя точками на кривой являются цена 5 долл., спрос 6 млн бритв и цена 5,05 долл., увеличенная на 1 %, спрос 5,88 млн (на 2 % меньше 6 млн). После создания диаграммы и вставки линейной линии тренда можно найти уравнение кривой спроса $y = 18 - 2{,}4x$. Поскольку $x$ – это цена, а $y$ – спрос, уравнение кривой спроса на бритвенные станки можно записать в следующем виде: спрос (млн) = 18 – 2,4 цена (долл.) (рис. 2.7).

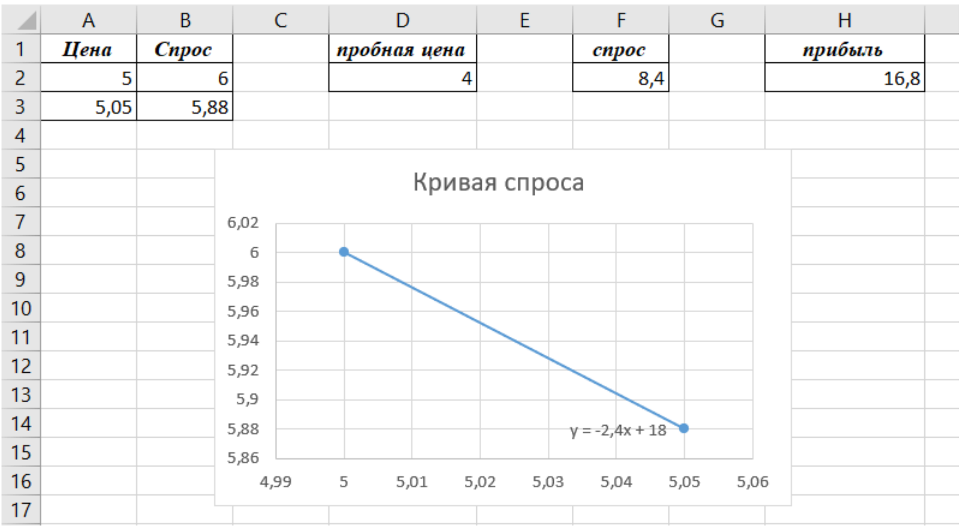



Рис. 2.7. Исходные данные задачи

Возьмем пробную цену на бритвенный станок в 4 долл. и внесем ее в ячейку D2. Вычислим для этой цены спрос в ячейке F2 по формуле $=18 - 2{,}4 \cdot D2$. Далее определим в ячейке H2 прибыль от бритвенных станков по формуле

$$\textit{прибыль} = \textit{спрос} \cdot (\textit{цена} - \textit{себестоимость бритвы}).$$

Используя надстройку *Excel* **Поиск решения,** определим цену бритвенного станка, максимизирующую прибыль от их реализации. Построим компьютерную модель задачи в следующем виде (рис. 2.8).

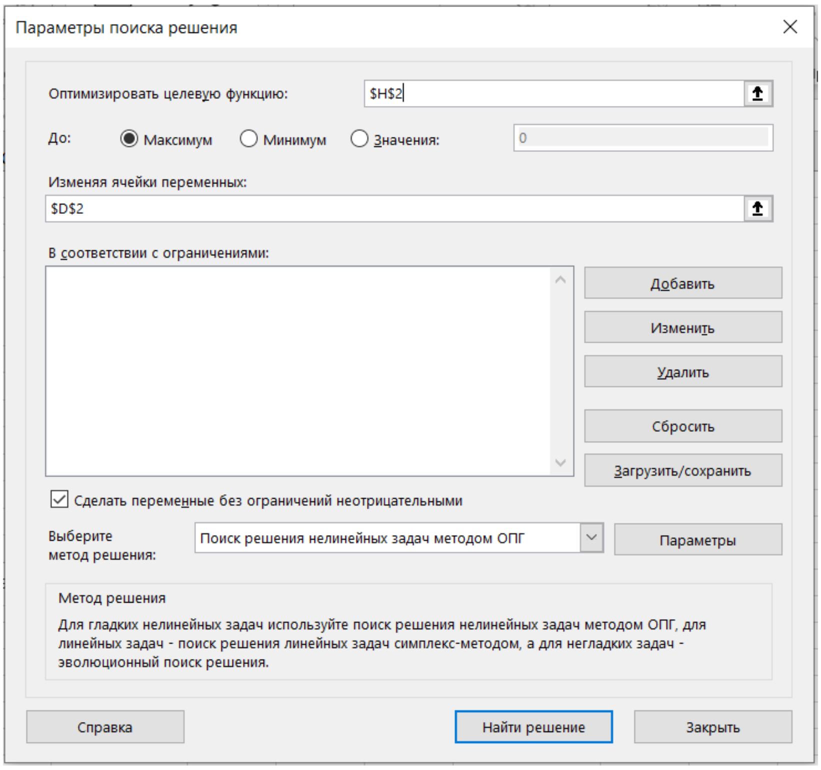



Рис. 2.8. Заполненное диалоговое окно **Параметры поиска решения**

В окошко **Оптимизировать целевую функцию** внесем ячейку, содержащую прибыль от реализации бритвенных станков, а в окошко **Изменяя ячейки переменных** поставим ячейку, содержащую пробную стоимость продукции. Поскольку построенная прибыль является нелинейной функцией, то для решения оптимизационной задачи выберем метод решения «Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ». Для решения нелинейных задач программа предлагает воспользоваться методом ОПГ (обобщенный метод приведенного градиента). Для выбора этого метода нужно воспользоваться опцией висячего меню.

Инструмент **Поиск решения** выполнит поиск цены за бритвенный станок, максимизирующей прибыль, и получит 4,75 долл. (максимальная прибыль составляет 18,15 млн долл.) (рис. 2.9).

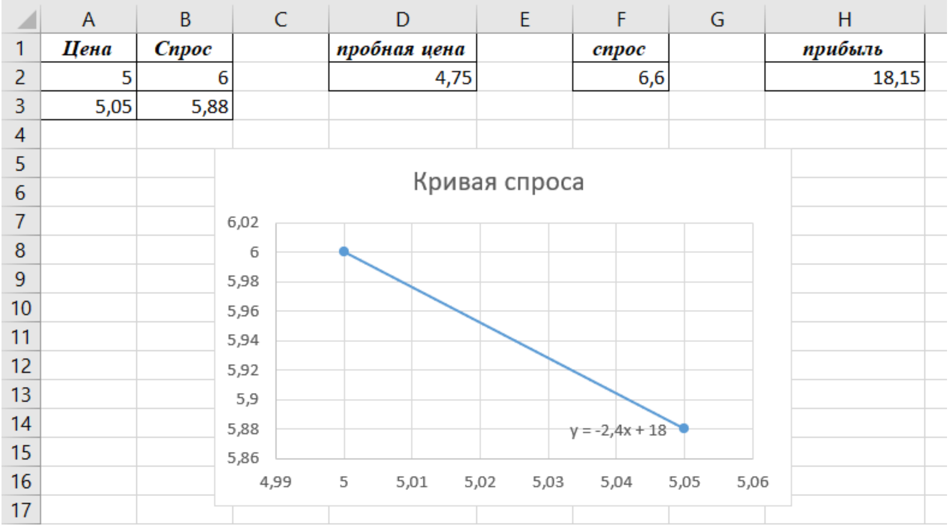



Рис. 2.9. Оптимальное решение задачи

Теперь предположим, что покупатель бритвенного станка приобретает в среднем 50 лезвий и каждое лезвие приносит прибыль 0,15 долл. Каким образом должна измениться назначаемая цена на бритвенный станок?

Для ответа на этот вопрос введем дополнительную информацию о лезвиях в *MS Excel* (рис. 2.10). В ячейку D6 внесем количество продаваемых лезвий с каждым станком, а в ячейку F6 получаемую при этом прибыль. С учетом этой информации пересчитаем прибыль от продажи бритвенных станков и лезвий по формуле

*прибыль = спрос · (цена – себестоимость бритвы) + спрос · лезвия для бритвы · прибыль от лезвия.*

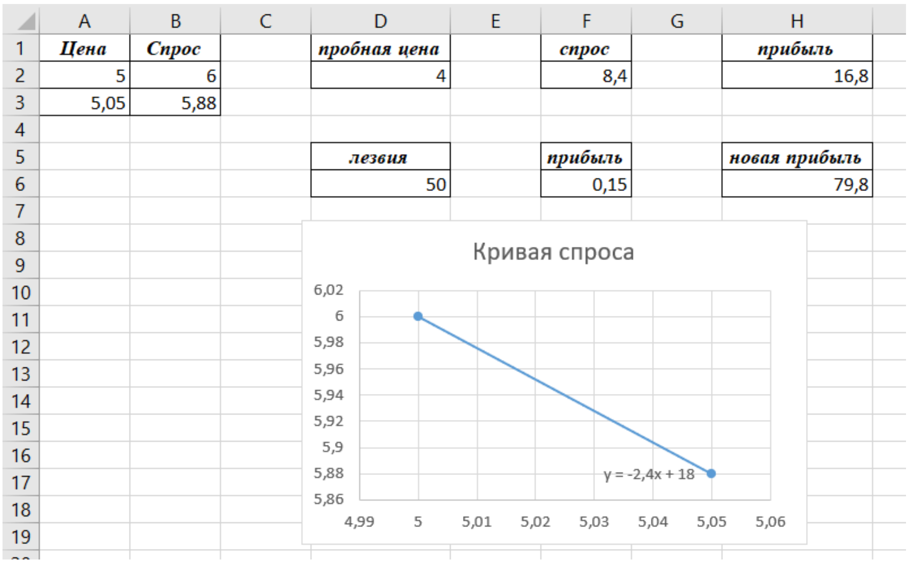



Рис. 2.10. Исходная информация с новыми условиями

Диалоговое окно **Параметры поиска решения** выглядит следующим образом (рис. 2.11):

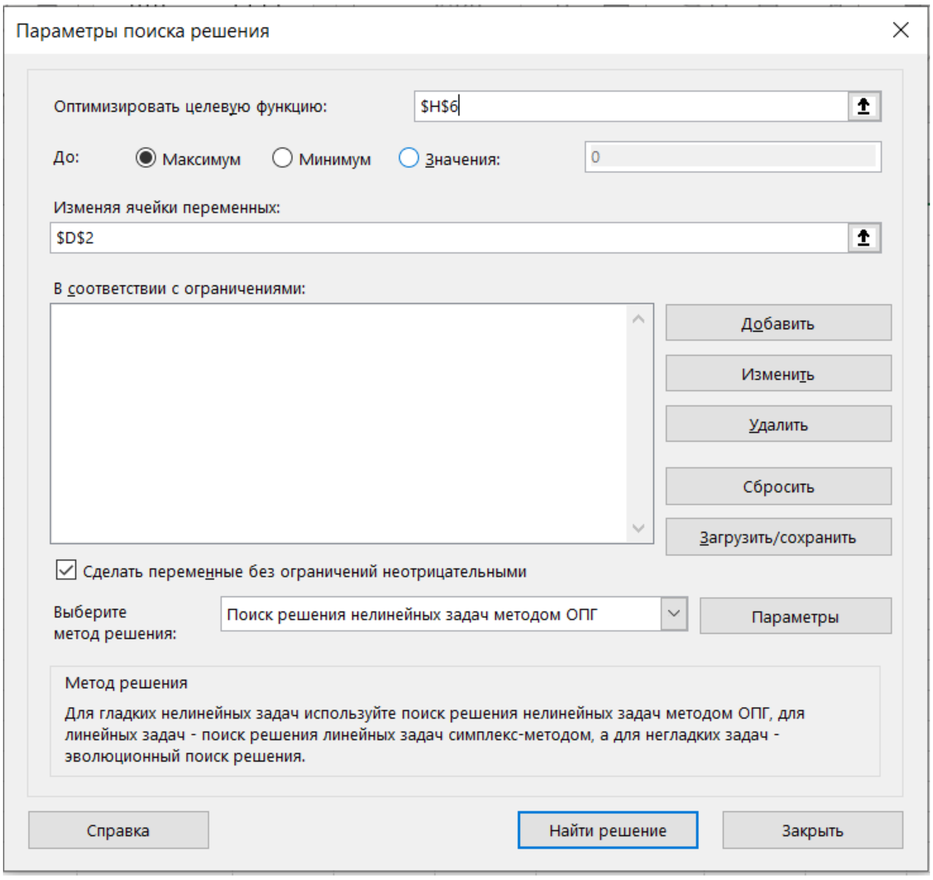



Рис. 2.11. Заполненное диалоговое окно **Параметры поиска решения**

Теперь формула прибыли включает в себя прибыль от реализации лезвий.

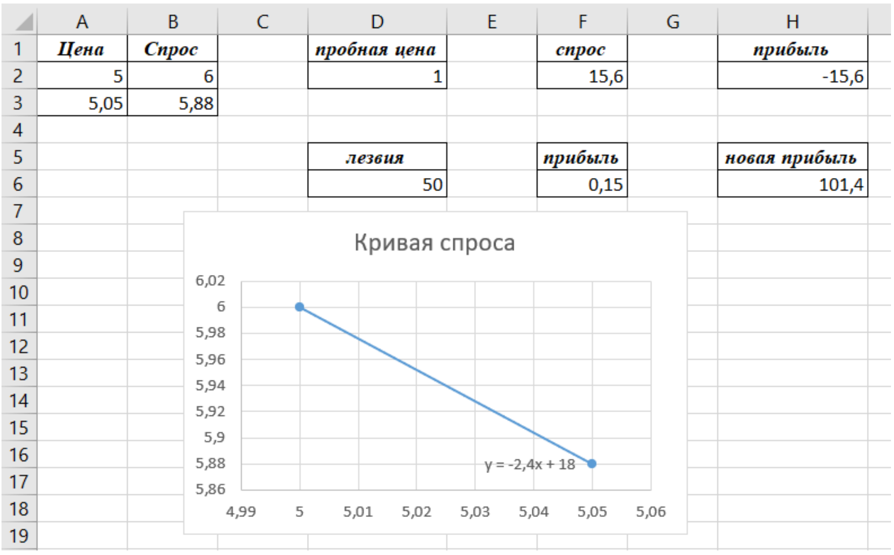



Рис. 2.12. Оптимальное решение задачи

Решение показывает, что прибыль максимальна при цене всего лишь 1 долл. (половина переменных затрат) за бритвенный станок (рис. 2.12). Такая цена является результатом получения большой прибыли от лезвий. Намного выгоднее продать бритвенные станки множеству клиентов, даже если вы теряете по 1 долл. на каждом проданном станке. Многие компании не понимают важности прибыли от сопутствующих товаров. Они завышают цену на первичный продукт и лишают себя возможности получить максимальную общую прибыль.

***Задания для самостоятельной работы***

1. Предположим, спрос на костюмы в магазине мужской одежды соответствует линейной кривой спроса, эластичность цены равна 5. При текущей цене в 500 долл. продается 60 костюмов в неделю. Себестоимость костюма составляет 200 долл. Предположим, к костюму клиент покупает два галстука и одну рубашку. Прибыль от продажи галстука составляет 15 долл., а от продажи рубашки – 25 долл. Какую цену на костюм должен установить магазин?

2. В настоящее время региональный агент по продаже спортивных автомобилей продает за год 200 машин по цене 150 000 долл. Дилерская цена закупки автомобиля составляет 60 000 долл. Предположим, за время эксплуатации автомобиля дилер зарабатывает 25 000 долл. на его обслуживании. Годовой спрос на автомобили представляет собой линейную кривую с эластичностью 4. Какую цену на автомобиль должен установить дилер, чтобы получить максимальную прибыль от продаж и обслуживания?

## 2.4. Ценообразование продуктов с помощью субъективно определяемого спроса

Если ценовая эластичность для продукта неизвестна или если невозможно выбрать, на какую кривую спроса полагаться – линейную или степенную, эффективным способом определения кривой спроса является выявление самой низкой и самой высокой разумной цены. Затем следует оценить спрос на продукт при высокой, низкой и промежуточной цене. При наличие этих трех точек на кривой спроса на продукт можно с помощью линии тренда в *Excel* подобрать квадратичную кривую спроса по следующей формуле

$$\text{спрос} = a(\text{цена})^2 + b(\text{цена}) + c. \qquad (2.1)$$

Для любых трех указанных точек на кривой существуют значения $a, b$ и $c$, при которых уравнение (2.1) точно соответствует трем указанным точкам. Поскольку уравнение (2.1) соответствует трем точкам на кривой спроса, по-видимому, разумно предположить, что уравнение даст точное представление о спросе и для других цен.

***Пример 2.4.*** Предположим, что аптека приобретает помаду за 0,90 долл. за штуку. Для помады рассматривается цена от 1,50 до 2,50 долл. В аптеке полагают, что при цене 1,50 долл. будет продаваться 60 штук в неделю, при цене

2 долл. – 51 штука в неделю и при цене 2,50 долл. – 20 штук в неделю. Какую цену на помаду должна назначить аптека?

Начнем с ввода всех известных данных в *MS Excel*. Выделим ячейки A2:B4 и на вкладке **Вставка** в группе **Диаграммы** выберем **Точечная или пузырьковая диаграмма**, затем укажем первый тип точечной диаграммы (рис. 2.13).

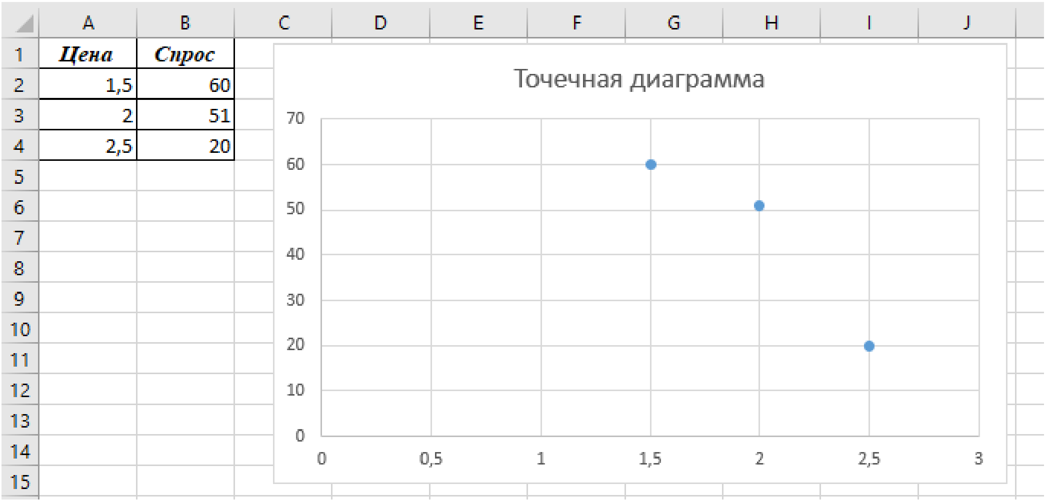



Рис. 2.13. Исходная информация задачи

Затем щелкнем правой кнопкой мыши на точке данных и в контекстном меню выберем **Добавить линию тренда.**

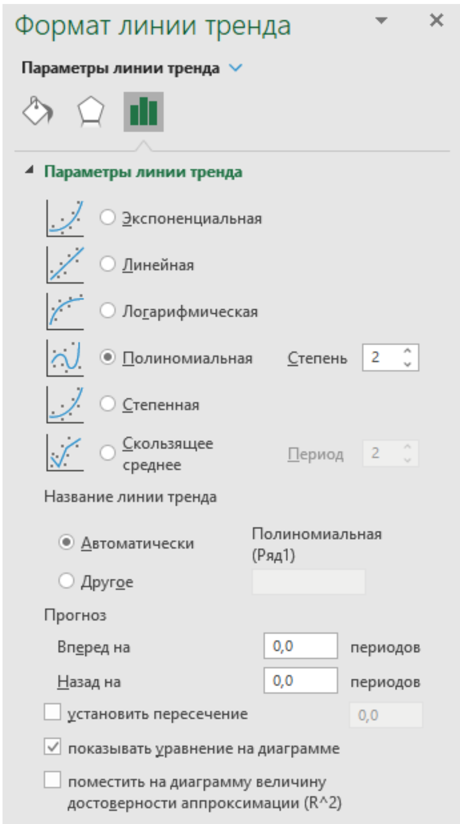



Рис. 2.14. Диалоговое окно **Формат линии тренда**

В диалоговом окне **Формат линии тренда** установим переключатель в положение **Полиномиальная** и в поле со списком **Степень** выберем значение 2 (для получения квадратичной кривой (1)). Установим флажок **Показать уравнение на диаграмме** (рис. 2.14). Появится диаграмма, показанная на рис. 2.15.


Рис. 2.15. Полиномиальная кривая спроса

Уравнение вычисленной кривой спроса имеет вид

$$q = -\,44 \cdot p^2 + 136 \cdot p - 45. \qquad (2.2)$$

Воспользуемся найденным уравнением для нахождения спроса на помаду для пробного значения цены. В ячейку E2 внесем значение цены, равное 1, а в ячейку G2 соответствующий этой цене спрос, согласно формуле (2.2).

Для нахождения оптимальной цены на помаду воспользуемся **Поиском решения**. Для построения компьютерной модели вычислим прибыль от реализации помады по формуле = *спрос· (цена – себестоимость)* и внесем ее в ячейку I2 (рис. 2.16).

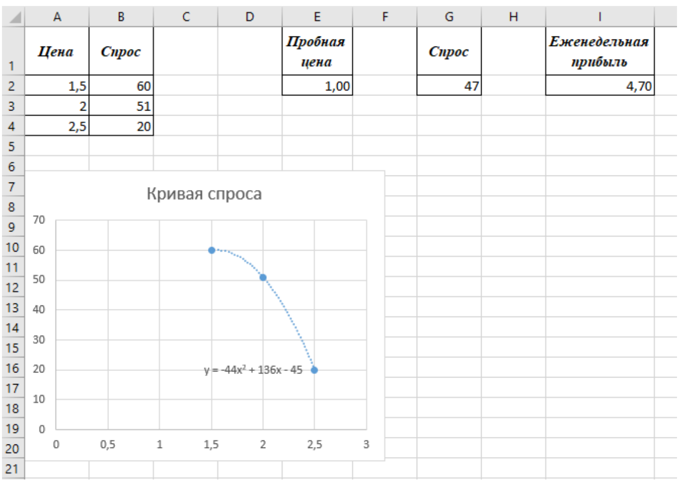



Рис. 2.16. Исходная информация для решения задачи

Диалоговое окно **Параметры поиска решения** в отличие от предыдущих примеров будет содержать два ограничения на стоимость помады (рис. 2.17). Для этого нажмем кнопку **Добавить,** расположенную рядом с полем **В соответствии с ограничениями**. Сформируем условие ограниченности цены снизу величиной 1,5 долл.

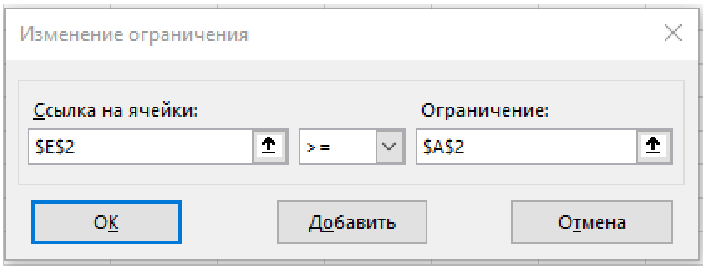



Рис. 2.17. Ограничение на стоимость помады снизу

Аналогично строится ограничение о том, что цена на помаду не должна быть выше 2,5долл. Если так не сделать, то кривая спроса может пойти вверх, и тогда получится, что более высокая цена приводит к более высокому спросу. Такой результат не имеет смысла, поэтому цену надо ограничить. Таким образом, приходим к компьютерной модели следующего вида (рис. 2.18):

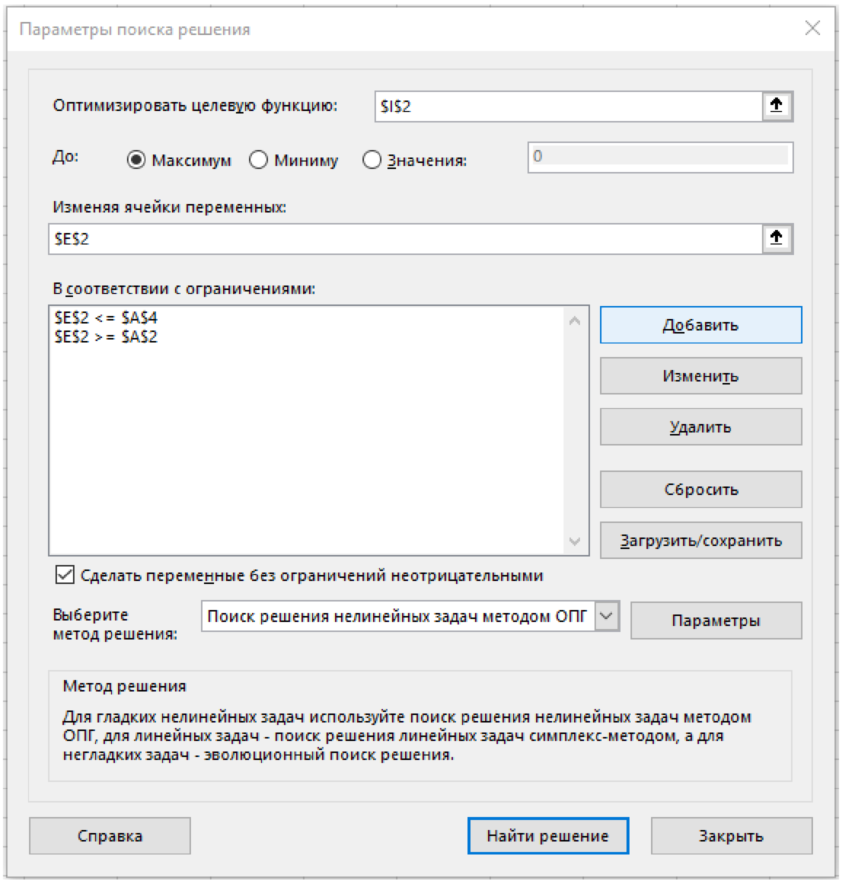



Рис. 2.18. Заполненное диалоговое окно **Параметры поиска решения**

После решения задачи приходим к результату, что аптека должна назначить на помаду цену 2,04 долл. (рис. 2.19).

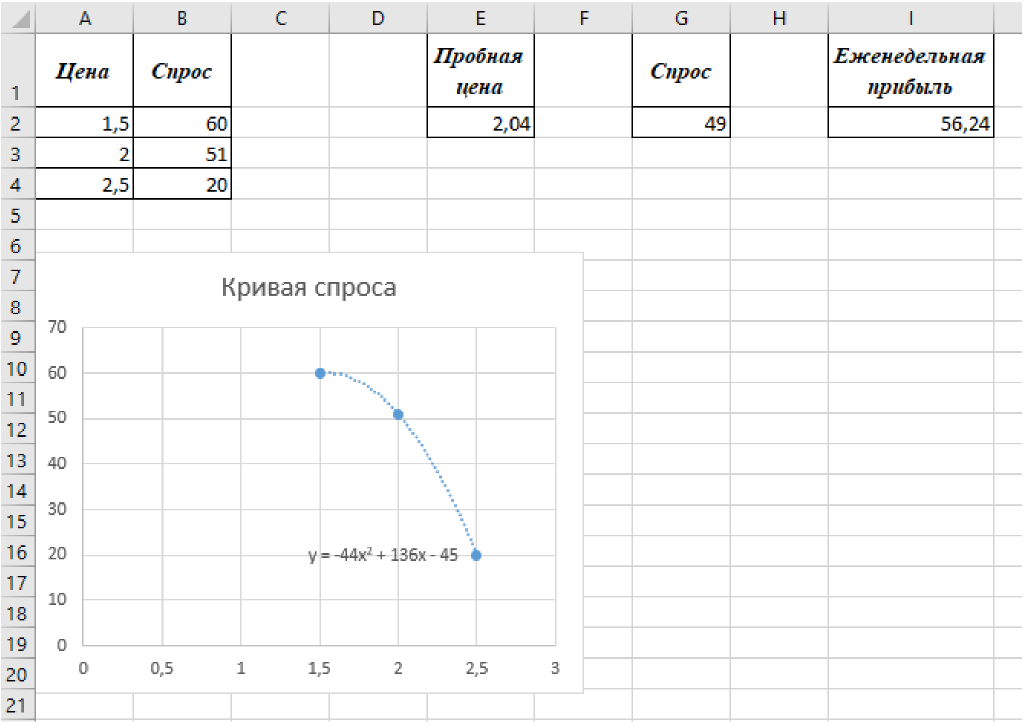



Рис. 2.19. Оптимальное решение задачи

Такая цена приведет к продажам 49 штук в неделю и ежедневной прибыли 56,24 долл.

Такой подход легко может быть применен в организациях, продающих тысячи разных продуктов. Единственные данные, которые требуется указать для каждого продукта, – это себестоимость и три точки на кривой спроса.

### *Задания для самостоятельной работы*

1. Предположим, что производство одной игровой приставки стоит 250 долл. Рассматривается цена от 200 до 400 долл. Предполагаемый спрос на игровые приставки представлен в таблице.

| Цена (долл.) | Спрос (млн) |
|---|---|
| 200 | 2,0 |
| 300 | 0,9 |
| 400 | 0,2 |

Какую цену следует назначить на игровую приставку?

2. Необходимо определить правильную цену на новый еженедельный журнал. Переменные затраты на печать и распространение экземпляра журнала составляют 0,50 долл. Рассматривается цена от 0,50 до 1,30 долл. за экземпляр. Расчетные еженедельные продажи журнала представлены в таблице.

| Цена (долл.) | Спрос (млн) |
|---|---|
| 0,50 | 2,0 |
| 0,90 | 1,2 |
| 1,30 | 0,3 |

В дополнение к выручке от продаж журнала можно получить по 30 долл. за каждую проданную тысячу экземпляров каждой из 20 страниц рекламы, размещаемой в еженедельнике. Какую цену надо назначить на журнал?

3. Аптеке требуется определить, какую цену установить на шоколадный батончик. Аптека платит за каждый батончик 60 центов и планирует продавать их по цене от 1 до 2 долл. за штуку. Предположительный спрос, соответствующий трем уровням цены, приведен в таблице ниже. Какую цену на батончик следует установить?

| Цена (долл.) | Спрос |
|---|---|
| 1 | 88 |
| 1,5 | 72 |
| 2 | 40 |

4. Магазин женской одежды закупает костюмы по 200 долл. за штуку. Спрос за неделю оценивается следующим образом:

| Цена (долл.) | Спрос |
|---|---|
| 250 | 32 |
| 300 | 25 |
| 350 | 23 |

Предположим, что каждая женщина, приобретая костюм, дополнительно покупает аксессуаров на 80 долл., 50 % от которых составляют прибыль магазина. Какую цену на костюм должен назначить магазин?

5. Подписчики рекомендательной службы получают доступ к рекомендациям о местных поставщиках услуг, таких как врачи, сантехники и т.д. Предполагается, что число новых подписчиков, подключающихся к службе ежемесячно, зависит от стоимости подписки следующим образом:

| Цена (долл.) | Спрос |
|---|---|
| 10 | 20 000 |
| 20 | 15 000 |
| 30 | 6 000 |

Предположим, что каждый подписчик остается в подписках в течение года. Кроме платы за подписку прибыль приносит щелчок подписчика по рекламному объявлению. Средний подписчик просматривает 10 рекламных объявлений в год. Какая цена подписки будет приносить максимальную прибыль?

# 3. Инструментальные средства в финансовой математике

## 3.1. Элементы теории процентов

В основе финансовой математики лежит понятие временной стоимости денег (*time value of money*), т.е. принцип неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Данный принцип является краеугольным камнем в современном финансовом мире. Согласно этому принципу, сегодняшнее поступление ценнее будущих. Соответственно будущие поступления обладают меньшей ценностью по сравнению с современными. Иными словами, «золотое» правило бизнеса гласит: «*Сумма, полученная сегодня, больше той же суммы, полученной завтра*».

Поясним данное правило на следующем примере.

***Пример 3.1.*** Предположим, что некто $X$ обладает суммой $P = 10\ 000$, которую он может положить в банк на депозит под 10 % годовых.

В идеальном случае (отсутствие инфляции, налогообложения, риска неплатежеспособности банка и т.д.) проведение этой операции обеспечит получение через год суммы, равной уже 11 000:

$$S = 10\ 000 + 10\ 000 \cdot 0{,}1 = 10\ 000(1 + 0{,}1) = 11\ 000.$$

Если указанная сумма (10 000) окажется в распоряжении $X$ только через год, он будет вынужден отложить или даже отменить осуществление этой операции, теряя тем самым возможность получить доход в 1 000.

Очевидно, что с точки зрения сумма $P = 10\ 000$, получение которой ожидается только через год, является в данной ситуации для $X$ менее ценной по сравнению с эквивалентной суммой, имеющейся к текущему моменту времени, поскольку обладание связано с возможностью заработать дополнительный доход (1 000) и увеличить свои средства до 11 000.

В этом же смысле текущая стоимость будущих 10 000 для $X$ эквивалентна той сумме, которую необходимо поместить в банк под 10 % чтобы получить их год спустя:

$$\frac{10\ 000}{1+0{,}1} = 9\ 090{,}91.$$

Продемонстрированная *неравноценность* двух одинаковых по величине, но разных по времени получения денежных сумм – явление, широко известное и осознанное в финансовом мире. Его существование обусловлено целым рядом причин. Вот лишь некоторые из них:

– любая имеющаяся в наличии денежная сумма в условиях рынка может быть немедленно инвестирована и спустя некоторое время принести доход;

– даже при небольшой инфляции покупательная способность денег со временем снижается;

– предпочтение в общем случае индивидуумами текущего потребления будущему и др.

Из принципа временной ценности денег вытекают по крайней мере два важных следствия:

– необходимость учета фактора времени при проведении финансовых операций;

– некорректность (с точки зрения долгосрочных финансовых операций) суммирования денежных величин, относящихся к разным периодам.

Таким образом, необходимость учета фактора времени при проведении финансовых операций требует применения специальных количественных методов его оценки.

В финансовых расчетах учет фактора времени осуществляется с помощью методов *наращения* и *дисконтирования*, в основу которых положена техника процентных вычислений. С помощью этих методов осуществляются приведение денежных сумм, относящихся к различным периодам, к требуемому моменту времени в настоящем или будущем. При этом в качестве нормы приведения используется показатель, называемый *ставкой* и определяемый отношением *процентных денег*, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к некоторому базовому капиталу. Это отношение выражается в десятичных дробях или в процентах.

Под *процентными деньгами*, или процентами, понимается абсолютная величина дохода, получаемая в результате финансовой операции.

Эффективность любой финансовой операции может быть охарактеризована *ставкой.*

*Процентная ставка* (*interest rate – r*) определяется отношением процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к величине исходного капитала:

$$r = \frac{S-P}{P},$$

где $P$ – начальная величина капитала (настоящая стоимость); $S$ – конечная величина капитала (будущая стоимость).

В финансовых вычислениях данный показатель имеет и другие названия – «ставка процентов», «процент», «рост», «норма прибыли».

В узком смысле процентная ставка представляет собой цену, уплачиваемую за использование заемных денежных средств. Однако в финансовых расчетах ее также часто используют в качестве измерителя уровня (нормы) доходности производимых операций, исчисляемого как отношение полученной прибыли к величине вложенных средств.

Под *наращением* понимают процесс увеличения первоначальной суммы в результате начисления процентов. Экономический смысл метода наращения состоит в определении величины, которая будет или может быть получена из некоторой первоначальной (текущей) суммы в результате проведения финансовой операции.

Другими словами, метод наращения позволяет определить будущую стоимость $S$ текущей суммы $P$ через некоторый промежуток времени исходя из заданной процентной ставки $r$.

При проработке различного рода финансовых операций нередко приходится решать обратную задачу: известно, какая сумма в будущем нужна для получения некоторого результата, необходимо найти ее текущее значение. Иными словами, какую сумму нужно инвестировать сегодня, чтобы через определенный промежуток времени получить заданное значение? Для обозначения данного процесса используется термин *дисконтирование*, под которым понимается нахождение стоимостной величины $P$ на заданный момент времени по ее известному или предполагаемому значению в будущем $S$. Название термина происходит от слова «дисконт» – скидка с цены долгового обязательства при авансированной выплате процентов за пользование кредитом.

Таким образом, процесс, в котором заданы исходная сумма и ставка, в финансовых вычислениях называется *процессом наращения*, искомая величина называется *наращенной суммой*, а ставка – *ставкой наращения*. Процесс, в котором заданы ожидаемая в будущем к получению (возвращаемая) сумма и ставка, называется *процессом дисконтирования*, искомая величина называется *приведенной суммой*, а ставка – *ставкой дисконтирования.*

В финансовых расчетах используются следующие виды процентных ставок. В зависимости от базы для начисления процентов различают *простые* (постоянная база) и *сложные проценты* (переменная база).

В общем случае наращение по ставке простых процентов осуществляется по следующей формуле

$$S = P(1 + n \cdot r),$$

где $r$ – ставка процентов; $n$ – число периодов.

***Пример 3.2.*** Вы поместили в банк вклад 10 тыс. р. под простую процентную ставку 26 % годовых. Какая сумма будет на вашем счете через три года? Какова будет величина начисленных процентов? Если банк осуществляет регулярные выплаты начисленных процентов, то какую сумму вы будете получать: а) каждый год; б) каждый квартал?

Поскольку $P = 10$ тыс. р., $n = 3$ года, $r = 0{,}26$, получим наращенную сумму через 3 года, если не происходят выплаты простых процентов:

$$S = 10 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}26) = 17{,}8 \text{ тыс. р.}$$

Следовательно, величина начисленных процентов составит:

$$S - P = 17{,}8 - 10 = 7{,}8 \text{ тыс. р.}$$

Величина начисленных простых процентов, выплачиваемых ежегодно, равна ($n = 3$) $\frac{S-P}{n} = \frac{7{,}8}{3} = 2{,}6$ тыс. р. При ежеквартальных выплатах:

$$\frac{S-P}{4n} = \frac{7{,}8}{12} = 0{,}65 \text{ тыс. р.}$$

Заметим, что проценты на уже начисленные проценты не начисляются независимо от срока хранения вклада. Поэтому имеет смысл начисленные простые проценты регулярно получать и использовать для иных инвестиций.

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной сумме, которую следует уплатить через некоторое время, необходимо определить сумму полученной ссуды. Такая задача может возникнуть, например, при разработке контрактов.

Дисконтирование является процессом, обратным к наращению первоначального капитала. При дисконтировании решается задача нахождения такой величины капитала (называемого *приведенной стоимостью*), которая через заданное время при наращении простыми процентами по данной процентной ставке будет равна сумме, ожидаемой к получению (уплате) через это заданное время.

Формула нахождения приведенной стоимости (при использовании простой ставки) имеет вид

$$P = \frac{S}{1+n\cdot r}.$$

Дробь $\frac{1}{1+n\cdot r}$ называется *дисконтным* или *дисконтирующим множителем.* Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга в окончательной его сумме.

***Пример 3.3.*** Через 180 дней после подписания договора должник уплатит 310 тыс. р. Кредит выдан под 16 % годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временная база равна 365 дней?

Решение. Для нахождения периода кредита воспользуемся формулой

$$n = \frac{t}{T},$$

где $t$ – продолжительность финансовой операции в днях; $T$ – временная база – количество дней в году. Отсюда следует, что

$$n = \frac{180}{365},$$

тогда находим первоначальную сумму долга по формуле

$$P = \frac{310000}{1+\frac{180}{365}\cdot 0{,}16} = 287\ 328{,}59 \text{ р.}$$

Сложные проценты широко применяются в долгосрочных финансовых операциях со сроком проведения более одного года. Вместе с тем они могут использоваться и в краткосрочных финансовых операциях, если это предусмотрено условиями сделки либо вызвано объективной необходимостью (например, высоким уровнем инфляции, риска и т.д.). При этом база для исчисления процентов за период включает в себя как исходную сумму сделки, так и сумму уже накопленных к этому времени процентов.

Схема сложных процентов предполагает их капитализацию, т.е. сумма, с которой происходит начисление, постоянно растет.

***Пример 3.4.*** Сумма в 10 000 помещена в банк на депозит сроком на 4 года. Ставка по депозиту – 10 % годовых. Проценты по депозиту начисляются по сложной процентной ставке раз в год. Какова будет величина депозита в конце срока?

По условиям данной операции известны величины: первоначальная сумма вклада $P = 10\ 000$, процентная ставка $r = 10\ \%$ и срок $n = 4$ года.

Определим величину вклада в конце первого периода:

$$S_1 = P + P\cdot r = P(1+r) = 10000(1+0{,}1) = 11000.$$

Соответственно для второго периода величина вклада будет равна

$$S_2 = S_1 + S_1\cdot r = P(1+r) + P(1+r)\cdot r = P(1+r)(1+r) =$$

$$= 10\,000(1 + 0{,}1)^2 = 12\,100.$$

Следовательно, для четвертого периода

$$S_4 = S_3 + S_3 \cdot r = P(1 + r)(1 + r)(1 + r)(1 + r) = P(1 + r)^4 =$$
$$= 10\,000(1 + 0{,}1)^4 = 14\,641.$$

Таким образом, общее соотношение для определения будущей величины по схеме сложных процентов имеет вид:

$$S = P(1 + r)^n.$$

В современных условиях проценты капитализируются, как правило, не один, а несколько раз в год – по полугодиям, кварталам и т.д. На практике в контракте обычно фиксируется ставка не за период начисления, а годовая ставка ($r$), одновременно указывается период начисления процентов ($m$). Тогда каждый раз проценты начисляются по ставке $\frac{r}{m}$. Ставку называют *номинальной.*

В этом случае формула сложных процентов преобразуется к виду

$$S = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m},$$

где $r$ – годовая процентная ставка; $m$ – число периодов начисления в году; $n$ – количество лет.

***Пример 3.5.*** В банк вложены деньги в сумме 10 000 р. сроком на 3 года под 6 % годовых. Определить сумму к концу срока в зависимости от периода начисления – год, полгода, квартал, месяц.

В зависимости от периода начисления (год, полгода, квартал, месяц) сумма к концу срока составит соответственно:

$$S = P(1 + r)^n = 10\,000(1 + 0{,}06)^3 = 11\,910{,}16 \text{ р.},$$
$$S = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m} = 10\,000\left(1 + \frac{0{,}06}{2}\right)^{3 \cdot 2} = 14\,185{,}19 \text{ р.},$$
$$S = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m} = 10\,000\left(1 + \frac{0{,}06}{4}\right)^{3 \cdot 4} = 20\,121{,}96 \text{ р.},$$
$$S = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m} = 10\,000\left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{3 \cdot 12} = 81\,472{,}52 \text{ р.}$$

Оценивая, целесообразность финансовых вложений в тот или иной вид бизнеса, исходят из того, является ли это вложение более прибыльным (при допустимом уровне риска), чем вложения в государственные ценные бумаги, или нет. Используя несложный метод, проанализируем будущие доходы при минимальном, «безопасном» уровне доходности.

Базовая расчетная формула (дисконтирование) для такого анализа имеет вид

$$P = \frac{S}{(1+r)^n},$$

где $P$ – текущая стоимость, т.е. оценка величины $S$ с позиций текущего момента, $S$ – доход, планируемый к получению через $n$ лет, $r$ – процентная ставка.

Множитель $\frac{1}{(1+r)^n}$ называется *дисконтирующим множителем.* Экономический смысл этого множителя заключается в следующем: он показывает «сегодняшнюю» цену одной денежной единицы будущего, т.е. чему с позиций текущего момента равна одна денежная единица (например, 1 р.), циркулирующая в сфере бизнеса $n$ периодов спустя от момента расчета, при заданной процентной ставке.

***Пример 3.6.*** Из какого капитала можно получить 45 тыс. р. через шесть лет наращением сложными процентами по процентной ставке 6 %, если наращение осуществляется ежегодно.

При ежегодном наращении пользуемся формулой при $r = 0{,}06$:

$$P = \frac{S}{(1+r)^n} = \frac{45}{(1+0{,}06)^6} = 31{,}72 \text{ тыс. р.}$$

## 3.2. Финансовые функции в MS Excel

Функции *MS Excel* используют базовые финансовые операции, базирующиеся на математическом аппарате методов финансово-экономических расчетов. Использование возможностей компьютера и табличного процессора *MS Excel* позволяет экономисту, менеджеру, бухгалтеру, финансисту, специалисту по ценным бумагам и т.п. облегчить выполнение расчетов и предоставить их в удобной для пользователя форме.

Финансовые функции табличного процессора *MS Excel* являются, по сути, небольшими подпрограммами решения определенных финансово-экономических задач. Среди финансовых функций можно выделить несколько групп функций, связанных с инвестициями, управлением денежными потоками, расчетом амортизации, операциями с ценными бумагами и др.

Выполнив команду **Формулы/Финансовые** в *MS Excel* (или используя кнопку **Мастер функций**), вы получите полный перечень списка имен функций, содержащихся в этой группе. При работе с финансовыми функциями необходимо учитывать специфику задания значения аргументов:

– можно вводить как сами значения аргументов, так и ссылки на адреса ячеек;

– все расходы денежных средств (платежи) представляются отрицательными числами, а все поступления денежных средств – положительными числами;

– процентная ставка вводится с использованием знака %;

– все даты как аргументы имеют числовой формат.

Финансовые функции электронных таблиц *MS Excel* для расчета операций по вкладам (займам) и кредитам имеют одинаковый набор аргументов (параметров):

*Ставка* $(r)$ – процентная ставка за период, норма доходности. Например, если получена ссуда на автомобиль под 10 % годовых и делаются ежемесячные выплаты, то процентная ставка за месяц составит 10 % / 12, или 0,83 %, или 0,008 3.

*Кпер* $(n)$ – число периодов проведения финансовой операции, срок накопления или ссуды. Например, если получена ссуда на 4 года под автомобиль и делаются ежемесячные платежи, то ссуда имеет $4 \cdot 12$ (или 48) периодов. В качестве значения аргумента *Кпер* в формулу нужно ввести число 48.

*Пс* ($P$) – это приведенная к текущему моменту (нынешняя) стоимость или общая сумма, которая на текущий момент равноценна ряду будущих платежей. Для займа *Пс* – это сумма займа.

*Бс* ($S$) – требуемое значение будущей стоимости или остатка средств после последней выплаты, т.е. стоимость, достигаемая в конце срока проведения операции. Если аргумент опущен, он полагается равным 0 (будущая стоимость займа, например, равна 0). Например, если предполагается накопить 50 000 р. для оплаты специального проекта в течение 185 лет, то 50 000 р. и есть будущая стоимость. Можно сделать предположение о сохранении заданной процентной ставки и определить, сколько нужно откладывать каждый месяц.

*Плт* ($C$) – постоянный периодический платеж (выплата, взнос) – сумма платежа, производимого в каждый период и не изменяющегося в течение всего времени проведения операции. Обычно выплаты включают основные платежи по процентам, но не включают других сборов и налогов. Например, ежемесячная выплата по четырехгодичному займу в 10 000 р. под 12 % годовых составит 263,33 р. В качестве значения аргумента *выплата* нужно ввести в формулу число 263,33.

*Период* ($i$) – порядковый номер периода выплат (от 1 до $n$).

*Тип* ($type$) – тип платежа (число 0 или 1, обозначающее, когда производится выплата – в начале (1) или в конце (0) периода).

Для вычислений, связанных с денежными потоками, в *MS Excel* используется общая формула:

$$P \cdot (1+r)^n + S + C \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \cdot (1 + r \cdot type) = 0. \quad (3.1)$$

В случае $r = 0$ (например, беспроцентная ссуда) применяется формула:

$$P + S + C \cdot n = 0. \quad (3.2)$$

Формулы (3.1) и (3.2) используются в следующих функциях *MS Excel*:

**БС** (*Ставка; Кпер; Плт; Пс; Тип*) – возвращает будущую стоимость инвестиции на основе периодических постоянных (равных по величине сумм) платежей и постоянной ставки.

**КПЕР** (*Ставка; Плт; Пс; Бс; Тип*) – возвращает общее количество периодов выплат для инвестиции на основе периодических постоянных выплат и постоянной процентной ставки.

**ПРОЦПЛАТ** (*Ставка; Период; Кпер; Пс*) – вычисляет проценты, выплачиваемые за определенный инвестиционный период.

**ПС** (*Ставка; Кпер; Плт; Бс; Тип*) – возвращает приведенную (к текущему моменту) стоимость инвестиций. Приведенная (нынешняя) стоимость представляет собой общую сумму, которая на настоящий момент равноценна ряду будущих выплат. Например, когда вы занимаете деньги, сумма займа является приведенной (нынешней) стоимостью для кредитора.

**ПЛТ** (Ставка; Кпер; Пс; Бс; Тип) – возвращает сумму периодического платежа на основе постоянства суммы платежей и постоянства процентной ставки и др.

*Замечание*. В формулах (1), (2) и в соответствующих финансовых функциях значения аргументов $P,\ S,\ C$ должны быть положительными в случае поступления этих денежных средств и отрицательными, если эти суммы подлежат уплате.

Рассмотрим примеры использования финансовых функций в расчетах по простым процентам.

***Пример 3.7.*** Определить наращенную сумму для вклада в размере 10 тыс. р., помещенного под простую процентную ставку 16 % годовых. Какова сумма будет на вашем счете через год?

Используем финансовую функцию **БС** (рис. 3.1).

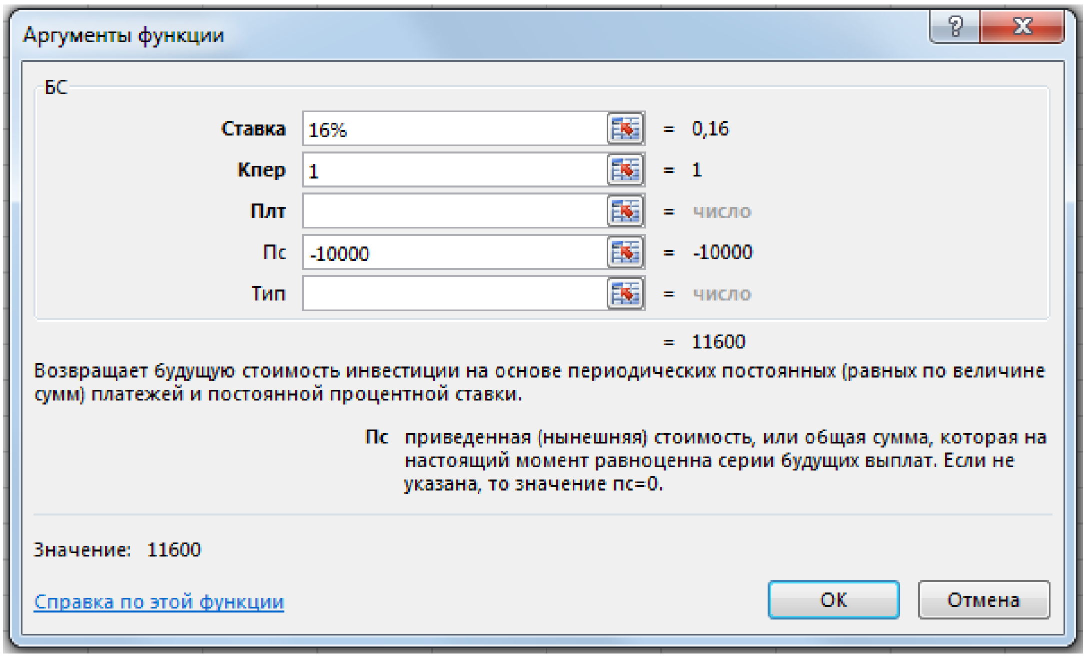



Рис. 3.1. Финансовая функция **БС**

Обратите внимание, что эта задача рассматривается с точки зрения вкладчика. Таким образом, аргумент **ПС** имеет отрицательное значение. Регулярные выплаты не производятся, так что аргумент **Плт** равен 0. Без выплат тип аргумента несуществен.

В нижней части окна *MS Excel* «*Аргументы функции*» появится ответ 11 600. Таким образом, через год наращенная сумма составит 11 600,00 р.

Для многих финансовых операций необходимо использовать данные о приведенных или современных денежных величинах как разовой суммы, так и потоков фиксированных периодических платежей. Для облегчения расчетов используется функция **ПС** – первоначальное значение.

Этот расчет является обратным к определению наращенной суммы при помощи функции **БС**, поэтому сущность использования аргументов этой функции аналогична. Вместе с тем вводится новый аргумент **БС** – будущая стоимость или будущее значение денежной суммы.

Рассмотрим функцию **ПС** для расчета по простым процентам (рис. 3.2).

***Пример 3.8.*** Через 125 дней следует накопить сумму в размере 2,5 тыс. р. Какой должен быть размер вклада, размещенный под 5 %?

Определим первоначальную сумму долга.

Если продолжительность финансовой операции представлена в днях, то необходимо ввести корректировку в процентную ставку, т.е. аргумент **Ставка** будет представлен как $\frac{t}{T} \cdot r$ %.

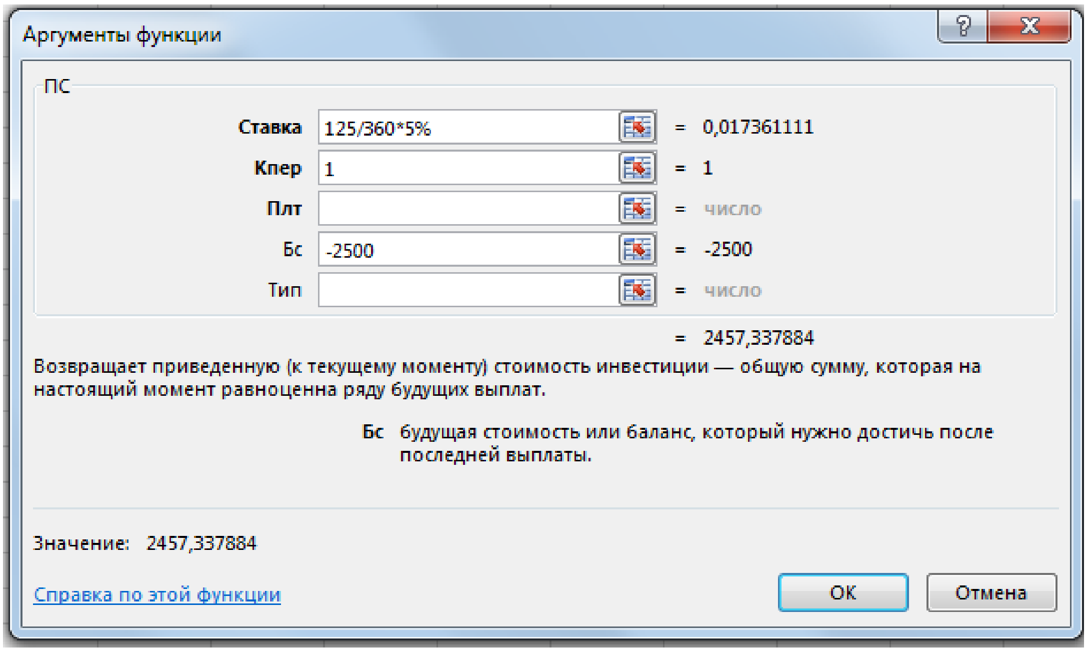



Рис. 3.2. Финансовая функция **ПС**

В нижней части окна *MS Excel* «*Аргументы функции*» появится ответ 2 457,34. Таким образом, на указанных условиях следует положить 2 457,34 р., что позволит через 125 дней получить 2 500,00 р.

Рассмотрим примеры использования финансовых функций в расчетах по сложным процентам с использованием *MS Excel*.

***Пример 3.9.*** Определите наращенную сумму для вклада в размере 10 тыс. р., помещенного под сложную процентную ставку 16 % годовых. Какая сумма будет на вашем счете через 3 года?

Используем финансовую функцию **БС** (рис. 3.3).

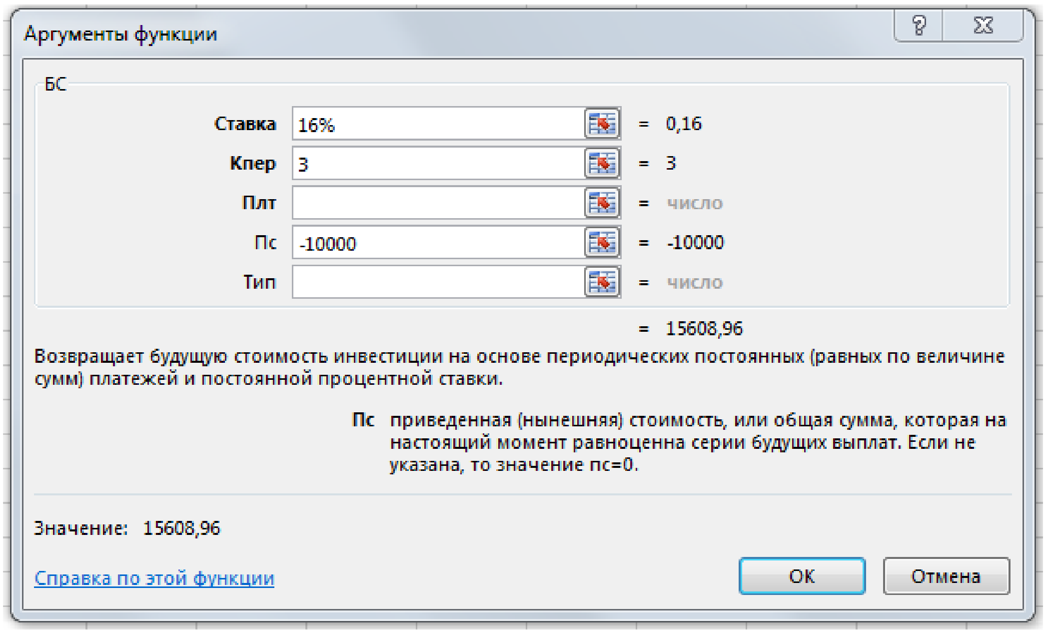



Рис. 3.3. Финансовая функция **БС**

Таким образом, через три года наращенная сумма составит 15 608,96 р.

***Пример 3.10.*** По облигации номиналом 100 тыс. р., выпущенной на 5 лет, предусмотрен следующий порядок начисления процентов: в первый год – 10 %, в последующие годы на 5 % больше. Рассчитайте будущую (наращенную) стоимость облигации по сложной процентной ставке.

Введем в ячейку А2 10 %, а в последующую ячейку А3 формулу =А2+5 %, ячейку А4 формулу =А3+5 % и т.д. Таким образом в столбце «*Процентные ставки*» получим процентные ставки, по которым начисляются проценты в течение пяти лет. Ячейка В2 содержит номинал облигации – 100 000 р. В итоге получим (рис. 3.4):

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *Процентные ставки* | *Номинал облигации* | *Будущая стоимость облигации* | |
| 2 | 10% | 100000 | | |
| 3 | 15% | | | |
| 4 | 20% | | | |
| 5 | 25% | | | |
| 6 | 30% | | | |
| 7 | | | | |

Рис. 3.4. Исходная информация задачи

Если процентная ставка меняется с течением времени, то для расчета будущей стоимости облигации после начисления сложных процентов можно использовать функцию **БЗРАСПИС**. Ее синтаксис:

**БЗРАСПИС** (первичное; план) – функция возвращает будущую стоимость первоначальной основной суммы после применения ряда (плана) ставок сложных процентов.

В структуре функции:

*Первичное* – это стоимость инвестиций на текущий момент.

*План* – это массив применяемых процентных ставок.

Используя эту функцию, получим (рис. 3.5):

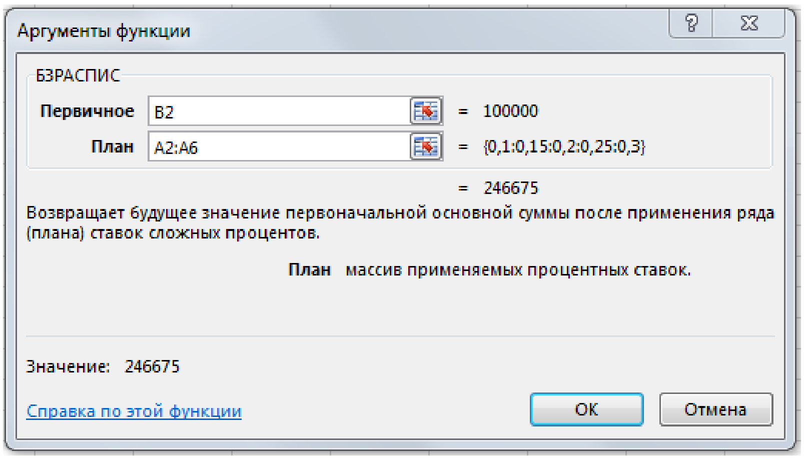



Рис. 3.5. Финансовая функция **БЗРАСПИС**

Таким образом, будущая стоимость облигации равна 246,675 тыс. р. (рис. 3.6).

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *Процентные ставки* | *Номинал облигации* | *Будущая стоимость облигации* | |
| 2 | 10% | 100000 | 246675 | |
| 3 | 15% | | | |
| 4 | 20% | | | |
| 5 | 25% | | | |
| 6 | 30% | | | |
| 7 | | | | |

Рис. 3.6. Будущая стоимость облигации

***Пример 3.11.*** Исходя из плана начисления процентов, приведенного в примере 3.10, рассчитайте номинал облигации, если известно, что ее будущая стоимость составила 616,687 5 тыс. р.

Для решения задачи необходимо использовать аппарат подбора параметра пакета *MS Excel*, вызываемый командой меню **Данные/Анализ «что если»/Подбор параметра**.

Пусть в ячейки A2:A6 введен план начисления процентов. В ячейку C2 запишем формулу =БЗРАСПИС(B2;A2:A6). Так как ячейка B2 пустая, то в C2 окажется нулевое значение. Установим курсор в ячейку C2 и выполним команду **Данные/Анализ «что если»/Подбор параметра** (рис. 3.7).

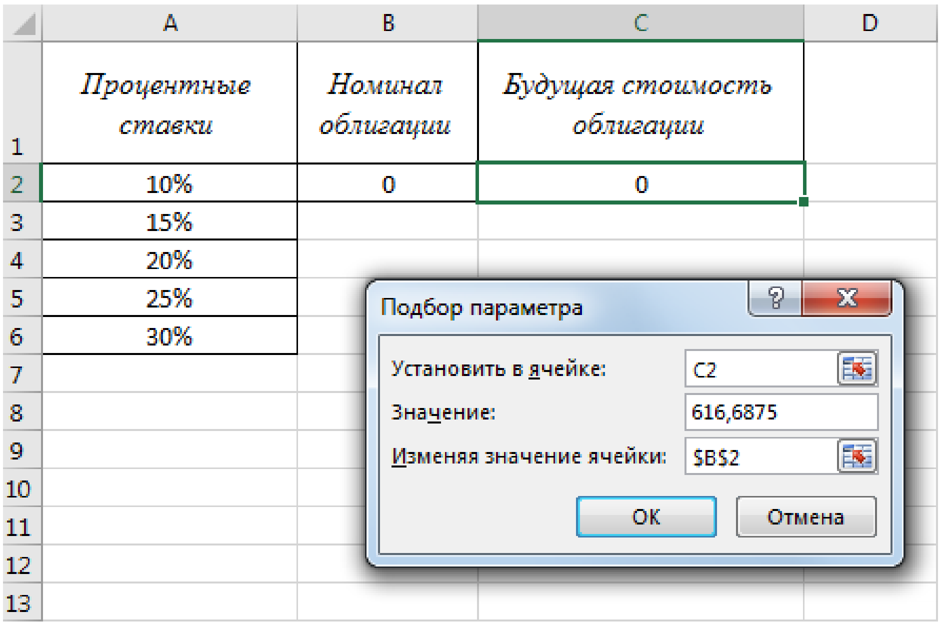



Рис. 3.7. Диалоговое окно **Подбор параметра**

После выполнения команды **Подбора параметра** в ячейке B2 появится значение номинала облигации – 250 тыс. р. (рис. 3.8).

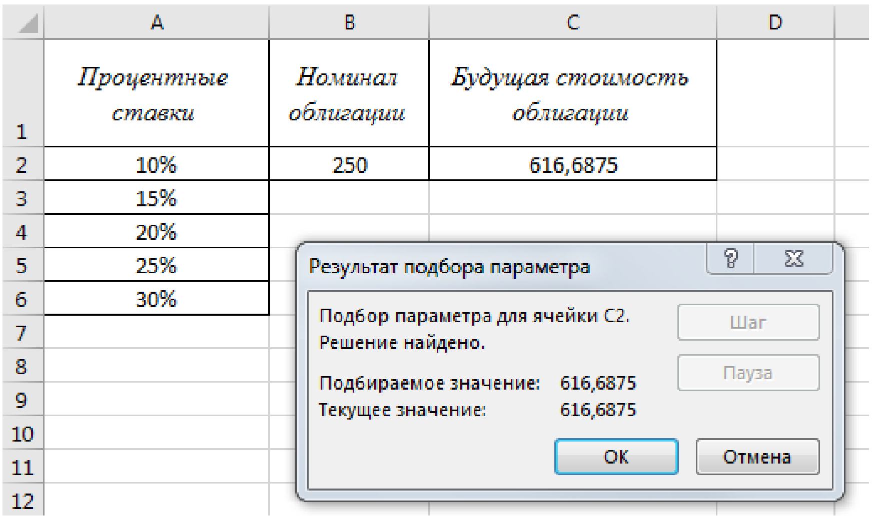



Рис. 3.8. Будущая стоимость облигации

Для определения общего числа периодов выплат как для единой суммы вклада (займа), так и для периодических постоянных выплат на основе сложной процентной ставки используют финансовую функцию **КПЕР**.

***Пример 3.12.*** У меня на депозитном счету 100 000, вложенные под 14 % годовых. Рассчитайте, сколько времени требуется для того, чтобы я стал миллионером?

Используем финансовую функцию **КПЕР** (рис. 3.9).

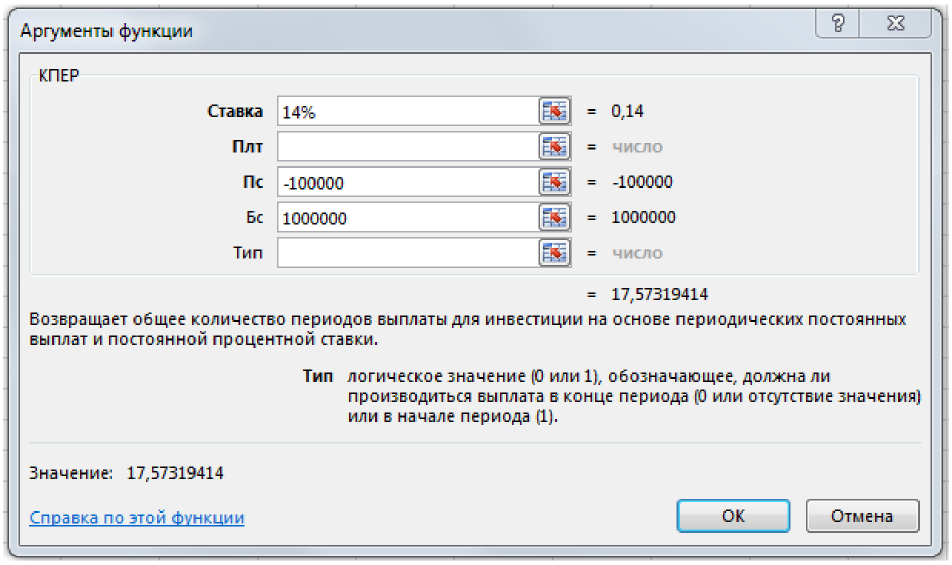



Рис. 3.9. Финансовая функция **КПЕР**

В результате получили, что через 17,57 лет я стану миллионером.

Почти все финансовые задачи связаны с расчетом *текущей* стоимости *будущих* потоков денежных средств. Денежные поступления (или потоки, как их еще можно называть) могут быть гарантированными или негарантированными. Проанализируем стоимость денежных поступлений, не подверженных риску, т.е. будущих поступлений, приход которых полностью гарантирован.

Ключевым понятием является *альтернативная стоимость* или *цена возможности*. Это ставка дохода, который должна приносить инвестиция для того, чтобы являться реальной, выгодной альтернативой другим аналогичным вложениям. При вычислении чистой приведенной стоимости альтернативная стоимость инвестиции используется как коэффициент (ставка) дисконтирования. При расчете внутренней ставки доходности рассчитанная норма прибыли сравнивается с альтернативной стоимостью капиталовложения и таким образом оценивается его реальная ценность.

## 3.3. Приведенная стоимость и чистая приведенная стоимость

*Приведенная стоимость*, ПС (*present value*, или *PV*), и *чистая приведенная стоимость*, ЧПС (*net present value*, или *NPV*), обозначают *текущую* стоимость ожидаемых в будущем денежных поступлений.

***Пример 3.13.*** Рассмотрим оценку инвестиции, обещающей доход 1 000 р. в год в конце нынешнего и еще четырех следующих лет. Предполагаем, что эта серия из пяти платежей по 1 000 р. каждый гарантирована и деньги непременно поступят. Если бы банк платил нам годовой процент в размере 10 % при депозите на пять лет, то эти 10 % процентов как раз и составляли бы альтернативную стоимость инвестиции – эталонную норму прибыли, с которой сравнивали бы выгоду от вложения. Можно вычислить ценность инвестиций путем дисконтирования денежных поступлений от нее с использованием альтернативной стоимости в качестве ставки дисконтирования, для этого воспользуемся финансовой функцией **ЧПС.**

Для начала внесем исходную информацию в *MS Excel* (рис. 3.10).

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | *Ставка дисконтирования* | 10% |
| 2 | *Текущая стоимость* | |
| 3 | | |
| 4 | *Год* | *Потоки средсте* |
| 5 | 1 | 1000 |
| 6 | 2 | 1000 |
| 7 | 3 | 1000 |
| 8 | 4 | 1000 |
| 9 | 5 | 1000 |
| 10 | | |

Рис. 3.10. Исходная информация задачи

Используя финансовую функцию **ЧПС** (рис. 3.11),

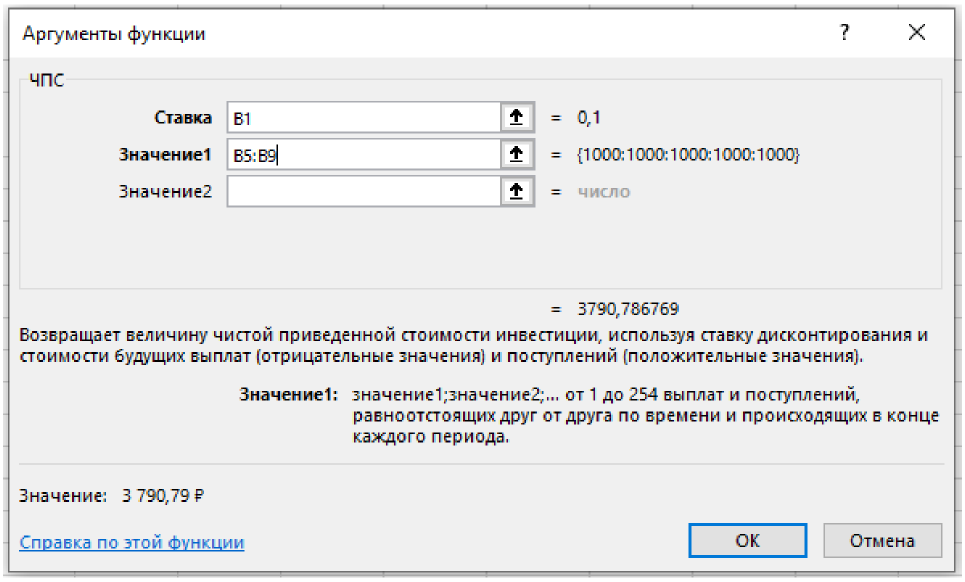



Рис. 3.11. Заполненное диалоговое окно **ЧПС**

приходим к результату:

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | *Ставка дисконтирования* | 10% |
| 2 | *Текущая стоимость* | 3 790,79 ₽ |
| 3 | | |
| 4 | *Год* | *Потоки средств* |
| 5 | 1 | 1000 |
| 6 | 2 | 1000 |
| 7 | 3 | 1000 |
| 8 | 4 | 1000 |
| 9 | 5 | 1000 |
| 10 | | |

Рис. 3.12. Текущая стоимость инвестиций

*Приведенная стоимость* (ПС) в объеме 3 790,79 р. и есть текущая стоимость инвестиций (рис. 3.12).

Предположим, что данная инвестиция продавалась бы за 4 000 р. Очевидно, она не стоила бы запрашиваемой цены, поскольку – при условии альтернативного дохода (учетной ставки) в размере 10 % – реальная стоимость этого капиталовложения составила бы 3 790,79 р. Здесь как раз уместно ввести понятие *чистой приведенной стоимости* (ЧПС). Обозначая символом $r$ учетную ставку для данной инвестиции, получаем следующую формулу для ЧПС:

$$NPV = CF_0 + \sum_{t=1}^{N} \frac{CF_t}{(1+r)^t},$$

где $CF_t$ – денежное поступление от инвестиции в момент $t$; $CF_0$ – поток средств (поступление на текущий момент).

Терминология *MS Excel*, касающаяся дисконтируемых потоков денежных средств, несколько отличается от стандартной финансовой терминологии. В *MS Excel* сокращение *NPV* (ЧПС) обозначает приведенную стоимость (а не *чистую* приведенную стоимость) серии денежных поступлений.

Чтобы рассчитать в *MS Excel чистую приведенную стоимость* серии денежных поступлений в обычном понимании финансовой теории, необходимо сначала вычислить *приведенную стоимость* будущих денежных поступлений (с использованием такой функции *MS Excel*, как ЧПС), а затем вычесть из этого числа денежный поток на начальный момент времени (эта величина часто совпадает со стоимостью рассматриваемого актива).

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | *Ставка дисконтирования* | 10% |
| 2 | *Текущая стоимость* | -209,21 ₽ |
| 3 | | |
| 4 | *Год* | *Потоки средств* |
| 5 | *0* | -4000 |
| 6 | 1 | 1000 |
| 7 | 2 | 1000 |
| 8 | 3 | 1000 |
| 9 | 4 | 1000 |
| 10 | 5 | 1000 |
| 11 | | |

=B5+ЧПС(B1;B6:B10)

Рис. 3.13. Чистая приведенная стоимость серии денежных поступлений

В итоге чистая приведенная стоимость составит – 209,21 р. (рис. 3.13).

Предположим, что за данную серию денежных потоков действительно было заплачено 4 000 р. *Внутренняя ставка доходности*, ВСД (*internal rate of return*, или *IRR*), определяется как сложная ставка дисконтирования $r$, обращающая величину ЧПС в ноль

$$CF_0 + \sum_{t=1}^{N} \frac{CF_t}{(1+r)^t} = 0.$$

Эта задача решается с помощью функции *MS Excel*, которая называется **ВСД** (рис. 3.14); следует заметить, что функция **ВСД** принимает в качестве аргументов все денежные потоки данного капиталовложения, включая самое первое (в данном случае отрицательное) поступление в размере – 400.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | *ВСД* | 7,9308% |
| 2 | *ЧПС* | -209,21 |
| 3 | | |
| 4 | *Год* | *Потоки средств* |
| 5 | *0* | -4000 |
| 6 | 1 | 1000 |
| 7 | 2 | 1000 |
| 8 | 3 | 1000 |
| 9 | 4 | 1000 |
| 10 | 5 | 1000 |
| 11 | | |

=ВСД(B5:B10)

Рис. 3.14. Внутренняя ставка доходности

Величина ВСД является *нормой прибыли от капиталовложения*. Чтобы как следует понять, о чем идет речь, полезно составить следующую таблицу (рис. 3.15).

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **ТАБЛИЦА ВОЗВРАТА СРЕДСТВ** | | | | **Распределение поступлений между доходов с инвестиции и возвратом основной суммы** | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | *Год* | *Основная сумма в начале года* | *Приход в конце года* | | *Доход* | *Возврат* | |
| 5 | 1 | 4000 | 1000 | | 317,23 | 682,77 | |
| 6 | 2 | 3317,232 | 1000 | | 263,08 | 736,92 | =C5-E5 |
| 7 | 3 | 2580,32 | 1000 | | 204,64 | 795,36 | |
| 8 | 4 | 1784,95 | 1000 | | 141,56 | 858,44 | |
| 9 | 5 | 926,52 | 1000 | | 73,48 | 926,52 | |
| 10 | | =B5-F5 | | | =7,9308%*B5 | | |
| 11 | | | | | | | |

Рис. 3.15. Таблица возврата средств

В этой *таблице возврата средств* каждое денежное поступление от актива делится на две составляющие: проценты на сумму инвестиции и возврат (погашение) основной суммы. Процентная составляющая в конце каждого года равна произведению ВСД на сумму вложенного капитала в начале того же года. Обратите внимание, что основная сумма в начале последнего года (926,52 р. в данном примере) в точности равна составляющей возврата основной суммы в конце того же года.

С помощью этой таблицы можно фактически вычислить внутреннюю ставку доходности. Рассмотрим инвестицию, которая сейчас стоит 10 000 р. и окупается полностью по прошествии 1-, 2-, …, 5-го года. Как показано в следующей таблице (рис. 3.16), ВСД этой инвестиции превышает 15 %.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Стоимость* | 10000 | | | | | |
| 2 | *ВСД* | 15% | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | **ТАБЛИЦА ВОЗВРАТА СРЕДСТВ** | | | | **Распределение поступлений между доходов с инвестиции и возвратом основной суммы** | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | *Год* | *Основная сумма в начале года* | *Приход в конце года* | | *Доход* | *Возврат* | |
| 8 | 1 | 10000 | 3000 | | 1500,00 | 1500,00 | |
| 9 | 2 | 8500,00 | 2000 | | 1275,00 | 725,00 | =C8-E8 |
| 10 | 3 | 7775,00 | 1500 | | 1166,25 | 333,75 | |
| 11 | 4 | 7441,25 | 6000 | | 1116,19 | 4883,81 | |
| 12 | 5 | 2557,44 | 9000 | | 383,62 | 8616,38 | |
| 13 | 6 | -6058,95 | =B8-F8 | | | =$B$2*B8 | |
| 14 | | | | | | | |

Рис. 3.16. Исходная информация задачи

Обратите внимание на ячейку B13, которую добавили в этом примере. Если процентная ставка в ячейке B2 действительно является ВСД, то в ячейке B13 должен стоять 0. Для вычисления ВСД можно воспользоваться инструментом **Подбор параметра** (рис. 3.17).

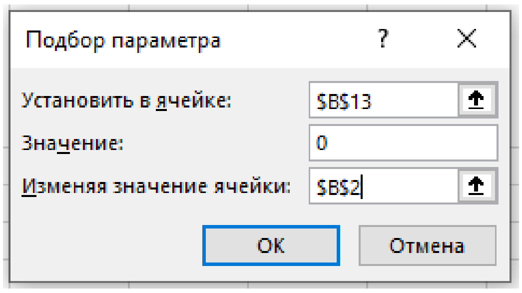



Рис. 3.17. Заполненное диалоговое окно **Подбор параметра**

Результат можно видеть на рис. 3.18.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *Стоимость* | 10000 | | | | |
| 2 | *ВСД* | 24,44% | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | **ТАБЛИЦА ВОЗВРАТА СРЕДСТВ** | | | | **Распределение поступлений между доходов с инвестиции и возвратом основной суммы** | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |
| 7 | *Год* | *Основная сумма в начале года* | *Приход в конце года* | | *Доход* | *Возврат* |
| 8 | 1 | 10000 | 3000 | | 2443,61 | 556,39 |
| 9 | 2 | 9443,61 | 2000 | | 2307,65 | -307,65 |
| 10 | 3 | 9751,25 | 1500 | | 2382,82 | -882,82 |
| 11 | 4 | 10634,08 | 6000 | | 2598,55 | 3401,45 |
| 12 | 5 | 7232,63 | 9000 | | 1767,37 | 7232,63 |
| 13 | 6 | 0,00 | | | | |
| 14 | | | | | | |

Рис. 3.18. Внутренняя ставка доходности

Разумеется, можно было бы воспользоваться формулой ВСД (рис. 3.19).

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **Прямой расчет ВСД** | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | *Год* | *Денежный поток* | | |
| 4 | 0 | -10000 | | |
| 5 | 1 | 3000 | | |
| 6 | 2 | 2000 | | |
| 7 | 3 | 1500 | | |
| 8 | 4 | 6000 | | |
| 9 | 5 | 9000 | | |
| 10 | | | | |
| 11 | | | | |
| 12 | *ВСД* | 24,44% | | |
| 13 | | | | |

**=ВСД(B4:B9)**

Рис. 3.19. Прямой расчет внутренней ставки доходности

## 3.4. График периодических выплат по кредиту

***Пример 3.14.*** Вы взяли кредит в размере 100 тыс. р. под 7 % в год. Банк желает получить его обратно вместе с процентами посредством ежегодных выплат в течение шести лет.

Для вычисления ежегодной выплаты можно воспользоваться функцией *MS Excel* под названием **ПЛТ** (рис. 3.20).

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **ГРАФИК ВЫПЛАТ ПО КРЕДИТУ** | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | *Сумма кредита* | 100000 | | |
| 4 | *Процентаная ставка* | 7% | | |
| 5 | *Срок кредита* | 6 | | |
| 6 | *Ежегодная выплата* | 20 979,58 ₽ | | |
| 7 | | | | |

**=ПЛТ(B4;B5;-B3)**

Рис. 3.20. Ежегодная выплата по кредиту

Обратите внимание, что в поле ПС – которое в *MS Excel* обозначает начальную сумму кредита – помещено значение со знаком «минус». В противном случае *MS Excel* выдаст отрицательную сумму платежа (это неудобно, но не страшно).

Правильность ответа можно проверить, составив таблицу погашения кредита (рис. 3.21).

**ГРАФИК ВЫПЛАТ ПО КРЕДИТУ**

| | |
|---|---|
| Сумма кредита | 100000 |
| Процентаная ставка | 7% |
| Срок кредита | 6 |
| Ежегодная выплата | 20 979,58 ₽ |

| Год | Основная сумма в начале года | Выплата в конце года | Содержание выплат: Процент | Содержание выплат: Погашение кредита |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100000 | 20979,58 | 7000 | 13979,58 |
| 2 | 86020,42 | 20979,58 | 6021,43 | 14958,15 |
| 3 | 71062,27 | 20979,58 | 4974,36 | 16005,22 |
| 4 | 55057,05 | 20979,58 | 3853,99 | 17125,59 |
| 5 | 37931,46 | 20979,58 | 2655,20 | 18324,38 |
| 6 | 19607,08 | 20979,58 | 1372,50 | 19607,08 |

=F5-G5

=E5-H5

=$B$4*E5

Рис. 3.21. График выплат по кредиту

## 3.5. Пример расчета будущей стоимости

***Пример 3.15.*** Вы открываете сберегательный счет. После внесения в этом году начального вклада в сумме 10 000 р., вы собираетесь делать такой же вклад в начале 1-, 2-, …, 9-го года. Если по вкладу выплачивают 10 % годовых, сколько у вас будет на счету в начале десятого года?

Эта задача легко решается в *MS Excel* (рис. 3.22).

**НАКОПЛЕНИЕ С ЕЖЕГОДНЫМИ ВЗНОСАМИ**

| | |
|---|---|
| Процент | 10% |

| Год | Баланс счета в начале года | Накопление дохода в течение года | Проценты, накопленные в течение года | Всего на счету в конце года |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 10000 | 1000 | 11000 |
| 1 | 11000 | 10000 | 2100 | 23100 |
| 2 | 23100 | 10000 | 3310 | 36410 |
| 3 | 36410 | 10000 | 4641 | 51051 |
| 4 | 51051 | 10000 | 6105,1 | 67156,1 |
| 5 | 67156,1 | 10000 | 7715,61 | 84871,71 |
| 6 | 84871,71 | 10000 | 9487,17 | 104358,88 |
| 7 | 104358,88 | 10000 | 11435,89 | 125794,77 |
| 8 | 125794,77 | 10000 | 13579,48 | 149374,25 |
| 9 | 149374,25 | 10000 | 15937,4246 | 175311,67 |
| 10 | 175311,67 | | | |

| | |
|---|---|
| Будущая стоимость | 175 311,67 ₽ |

=D6+C6+B6

=E6

=$B$3*(C6+B6)

=БС(B3;A16;-10000;;1)

Рис. 3.22. Расчет будущей стоимости

Таким образом, итоговая сумма на счету десятого года составляет 175 311,67 р. Этот же ответ можно вычислить по формуле, в которой суммируется будущая стоимость всех ежегодных вкладов.

Сумма в начале десятого года составит

$$10\,000 \cdot (1 + 10\,\%)^{10} + 10\,000 \cdot (1 + 10\,\%)^{9} + \cdots + 10\,000 \cdot (1 + 10\,\%)^{1} =$$

$$= \sum_{t=1}^{10} 10\,000 \cdot (1 + 10\,\%)^{t}.$$

В ячейке B18 используется функция **БС**, вычисляющая эту сумму. Диалоговое окно, которое открывается для задания ее параметров, приведено на рис. 3.23.

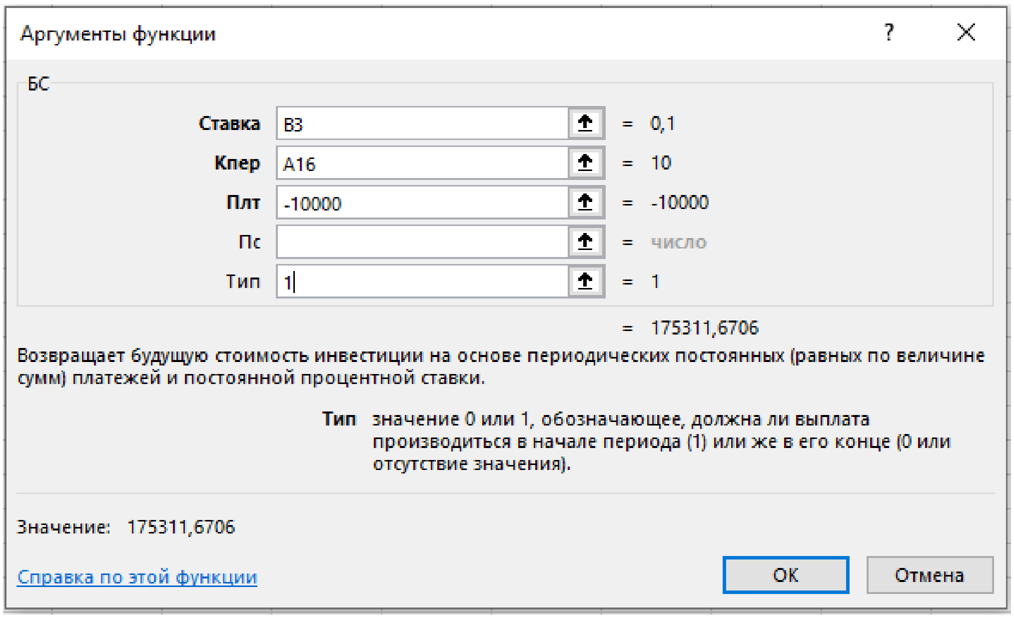



Рис. 3.23. Заполненное диалоговое окно **Аргументы функции БС**

Сделаем три замечания по поводу этой функции:

1. Для положительных вкладов **БС** возвращает отрицательное число. Чтобы не получить отрицательных результатов, в поле **Плт** вводится число – 10 000.

2. Строка **Пс** в диалоговом окне относится к ситуации, когда на счету в момент внесения вклада имеется некоторая начальная сумма, отличная от нуля. В нашем примере эта строка не заполнена – подразумевается, что начальная сумма равна нулю.

3. Как указывает примечание в диалоговом окне, поле **Тип** может принимать значение 1 или 0 в зависимости от того, делается выплата в начале или в конце каждого периода.

### *Задания для самостоятельной работы*

1. Вам предложили приобрести актив стоимостью 6 000 р., приносящий денежное поступление 1 000 р. в конце года в течение следующих десяти лет:

– если ставка дисконтирования этого актива составляет 8 %, стоит ли его приобретать?

– какова ВСД данного актива?

2. Вы только что взяли кредит на сумму 100 тыс. р. на пять лет. Выплаты в конце года постоянны (т.е. одинаковы для всех лет), а процентная ставка составляет 15 %. Рассчитайте таблицу возврата средств и покажите распределение платежей каждого года между выплатой процентов и основной суммы кредита.

3. Вам предложили сделать инвестицию на следующих условиях:

– сумма инвестиций составляет 10 тыс. р.;

– инвестиция дает денежное поступление в размере $x$ рублей в конце первого года; каждый год в течение 11 лет это поступление возрастает на 10 %.

Пусть ставка дисконтирования составляет 15 %. Рассчитайте минимальное значение $x$, которое убедило бы вас согласиться на инвестицию (приобретение активов). Например, как показано на рис. 3.24 $x = 1\ 000$ слишком мало – значение **ЧПС** в таблице получается отрицательным.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *Ставка диконтирования* | 15% | | |
| 2 | *Начальный взнос* | 1000 | | |
| 3 | *ЧПС* | -2265,16 | | |
| 4 | | | | |
| 5 | *Год* | | | |
| 6 | 0 | -10000 | | |
| 7 | 1 | 1000 | =B2 | |
| 8 | 2 | 1100 | =B7*1,1 | |
| 9 | 3 | 1210 | =B8*1,1 | |
| 10 | 4 | 1331 | | |
| 11 | 5 | 1464,10 | | |
| 12 | 6 | 1610,51 | | |
| 13 | 7 | 1771,56 | | |
| 14 | 8 | 1948,72 | | |
| 15 | 9 | 2143,59 | | |
| 16 | 10 | 2357,95 | | |
| 17 | 11 | 2593,74 | | |
| 18 | | | | |

Рис. 3.24. Расчет ЧПС для начального взноса 1 000 р.

4. Рассчитайте ежегодную постоянную выплату по кредиту в сумме 100 тыс. долл., взятому на пять лет под 13 % годовых.

5. Вы рассматриваете сберегательный план, в котором предполагается в конце каждого из следующих пяти лет вносить 15 тыс. долл. на счет. Если в этом плане предлагается 10 % годовых, сколько у вас окажется на счету в конце 5-го года?

Выполните этот расчет, заполнив следующую таблицу (рис. 3.25). В ней расчет выполняется дважды – один раз с помощью функции **БС**, а второй раз с помощью простой таблицы, показывающей накопление вклада к началу каждого года.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *Ежегодная выплата* | | | |
| 2 | *Процентная ставка* | | | |
| 3 | *Количество лет* | | | |
| 4 | *Общая сумма* | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | *Год* | *Накопление на начало года* | *Взнос в конце года* | *Накоплаение процентов на начало года* |
| 8 | *1* | | | |
| 9 | *2* | | | |
| 10 | *3* | | | |
| 11 | *4* | | | |
| 12 | *5* | | | |
| 13 | *6* | | | |
| 14 | | | | |

Рис. 3.25. Образец таблицы

6. Вам исполнилось 35 лет, и вы решили открыть пенсионный сберегательный счет. Когда вы уйдете на пенсию через 30 лет (т.е. в возрасте 65 лет), вы хотели бы иметь годовой доход 500 000 р. в течение следующих 20 лет. Рассчитайте, сколько вам нужно вносить на сберегательный счет, начиная с текущего момента и до возраста 65 лет, чтобы такой уровень дохода стал возможным. Сделайте следующие предположения:

– на все сбережения начисляется сложный годовой процент в размере 10 %;

– первый взнос делается сейчас, а последний – в день, когда вам исполнится 64 года (всего 30 взносов);

– вы впервые снимете средства с этого счета в свой 65-й день рождения, а в последний раз – в возрасте 84 лет (всего 30 выплат).

## Список рекомендуемой литературы


Аксенюшкина Е.В., Тарасенко Н.В., Тимофеев С.В. Математика – 2. Нелинейное и линейное программирование. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2009.

Афанасьев М.Ю., Багриновский К.А., Матюшок В.М. Прикладные задачи исследования операций. – М. : ИНФРА-М, 2006.

Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Исследование операций в экономике. – М. : ИНФРА-М, 2003.

Балдин К.В., Башлыков В.Н., Рокосуев А.В. Математические методы и модели в экономике. – М. : Флинта, 2012.

Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. – М. : Финансы и статистика, 2001.

Гаврилец Ю.Н. Целевые функции социально-экономического планирования. – М. : Наука, 1983.

Гармаш А.Н., Орлова И.В. Математические методы в управлении. – М. : Вуз. учеб. : ИНФРА-М, 2013.

Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели в менеджменте. – СПб. : Изд-во СПбГТУ, 2000.

Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. – М. : Юнити, 1995.

Грешилов А.А. Прикладные задачи математического программирования. – М. : Логос, 2006.

Дубров А.М., Лагоша Б.А. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. – М. : Финансы и статистика, 2000.

Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы. – М. : Изд. дом «Дело» РАНХиГС, 2011.

Зайцев М.Г. Методы оптимизации управления для менеджеров: компьютерно-ориентированный подход. – М. : Изд-во «Дело» АНХ, 2008.

Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М. : Дело и Сервис, 2009.

Иванилов Ю.П. Математические модели в экономике. – М. : Наука, 1999.

Ильченко А.Н. Экономико-математические методы. – М. : Финансы и статистика, 2006.

Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельев Т.И. Математические методы и модели в планировании. – М. : Экономика, 1987.

Колемаев В.А. Математические методы и модели исследования операций. – М. : ЮНИТИ, 2008.

Компьютерное моделирование менеджмента / А.Ф. Горшков [и др.] ; под ред. Н.П. Тихомирова. – М. : Экзамен, 2007.

Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике. – М. : Юрайт ; ИД Юрайт, 2010.

Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. – М. : Изограф, 1997.

Левин М.И., Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическое моделирование экономического взаимодействия. – М. : Физматлит, 1993.

Логинов В.Н. Управленческие решения: модели и методы. – М. : Альфа-Пресс, 2011.

Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. – М. : Наука, 1984.

Мадера А.Г. Моделирование и принятие решений в менеджменте: Руководство для будущих топ-менеджеров. – М. : Изд-во ЛКИ, 2012.

Макарова С.И. Экономико-математические методы и модели. – М. : Кнорус, 2009.

Методы оптимальных решений в экономике и финансах : учебник / И.А. Александрова [и др.] ; под ред. В.М. Гончаренко, В.Ю. Попова. – М. : Кнорус, 2010.

Экономическое моделирование в Microsoft Excel / Мур Дж.Х., Уэдерфорд Л.Р. и др. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2004.

Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде Excel. – М. : ЗАО «Финстатинформ», 2000.

Пинегина М.В. Экономико-математические методы и модели. – М. : Экзамен, 2002.

Попов А.М., Сотников В.Н. Экономико-математические методы и модели. – М. : Юрайт, 2011. – (Сер. : Бакалавр).

Просветов Г.И. Математические методы и модели в экономике: задачи и решения. – М. : Альфа-Пресс, 2008.

Просветов Г.И. Анализ данных с помощью Excel: задачи и решения. – М. : Альфа-Пресс, 2015.

Решение экономических задач на компьютере / А.В. Каплан [и др.]. – М. : ДМК Пресс, 2008.

Савиных В.Н. Математическое моделирование производственного и финансового менеджмента. – М. : Кнорус, 2012.

Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel. – СПб. : БХВ – Петербург, 2003.

Солянкин А.А Компьютеризация финансового анализа и прогнозирования в банке. – М. : Финстатинформ, 1998.

Таха Х.А. Введение в исследование операций. – М. : Вильямс, 2005.

Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте. – М. : Изд-во РДЛ, 2002.

Урубков А.Р., Федотов И.В. Методы и модели оптимизации управленческих решений. – М. : Изд. дом «Дело» РАНХиГС, 2012.

Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Орлова И.В. Экономико-математические методы и прикладные модели. – М. : Юрайт, 2012. – (Сер. : Бакалавр. Базовый курс).

Федосеев В.В. Экономико-математические модели и прогнозирование рынка труда. – М. : Вуз. учеб., 2010.

Федосеев В.В., Эриашвили Н.Д. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. – М. : Юнити-Дана, 2001.

Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М. : Финансы и статистика : Инфра-М, 2009.

Хачатрян С.Р., Пинегина М.В., Буянов В.П. Методы и модели решения экономических задач. – М. : Экзамен, 2005.

Шелехова Л.В. Методы оптимальных решений. – СПб. : Лань, 2016.

Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. – М. : Юнити-Дана, 2000.